

UNIVERSIDAD DE ALICANTE

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES



GRADO EN ECONOMÍA

CURSO ACADÉMICO 2018-2019

**ESTUDIO Y PREDICCIÓN DE LA VOLATILIDAD ASOCIADA A LA
RENTABILIDAD DE ACCIONES**

LARA ALEMAÑ LEDESMA

ALFONSA DENIA CUESTA

Fundamentos de Análisis Económico

Alicante, Junio de 2019

RESUMEN

Se ha estudiado el comportamiento de un conjunto de cinco series financieras y su correspondiente cartera equiponderada, siendo necesario para ello la modelización de la media mediante modelos lineales ARMA además de la modelización de la volatilidad mediante modelos GARCH y sus variantes tras haber comprobado la dinámica cambiante de esta y la necesidad de estimarla para conocer la volatilidad actual y predecir la futura, lo que es vital para tomar decisiones de inversiones y la gestión del riesgo.

Los resultados nos indicarán que la mejor forma de predecir la volatilidad es mediante los modelos EGARCH, por tener en cuenta efectos asimétricos. Con estas estimaciones observaremos la correcta construcción de la cartera de mínima varianza global con dicha volatilidad estimada, dejando de lado la errónea idea de mantener la varianza constante en el tiempo.

Palabras clave: Modelos ARMA, valores atípicos, volatilidad, modelos GARCH, cartera de mínima varianza global.

ABSTRACT

It has been studied the behavior of a set of five financial series and its corresponding equally-weighted portfolio, being necessary for this purpose the modeling of the mean using ARMA linear models and the modeling of variance using GARCH models and their variants after having verified the changing dynamics of volatility and the need to estimate it to know the current volatility and forecast the future, which is vital to make investment decisions and risk management.

The results will indicate that the best way to predict volatility is through the EGARCH models, taking into account asymmetric effects, and with these estimates we will observe the correct construction of the global minimum variance portfolio with this estimated volatility, leaving aside the erroneous idea of keeping the variance constant over time.

ÍNDICE

1.	Introducción	4
2.	Descripción de las series a estudiar.....	5
2.1	Estadísticos descriptivos habituales.	8
2.2	Estadísticos robustos.....	9
3.	Análisis y modelización de la media	11
3.1	Modelización de la media	11
3.2	Intervención de valores atípicos.....	19
4.	Presencia de heterocedasticidad condicional	24
4.1	Contraste ARCH.....	27
4.2	Estimación de la heterocedasticidad condicional.	28
5.	Construcción de una cartera de mínima varianza global	41
6.	Conclusiones	46
7.	Bibliografía	47
8.	Anexos	48

1. Introducción

El presente trabajo se basa en conocer la dinámica de un conjunto de series financieras de una manera precisa para poder llevar a cabo predicciones y tomar decisiones de inversión correctamente. Concretamente, tratamos de analizar cinco series en rentabilidades diarias de acciones que cotizan en el índice bursátil estadounidense S&P 500, estudiaremos observaciones diarias desde el 30/12/2002 hasta el 30/05/2018 contando con un total de 3892 observaciones. Numerosos trabajos muestran posibilidades de decisiones de inversión tomadas en función de dos parámetros, rentabilidad media y riesgo (cartera de Markowitz), tratando de encontrar un equilibrio entre alta rentabilidad y bajo riesgo. Es por ello que trataremos de entender los modelos lineales que han generado nuestros datos (modelos ARMA), centrándonos, sin embargo, en entender la dinámica de la volatilidad. El término volatilidad ha adquirido una gran importancia, principalmente en el mundo de las finanzas. Si asociamos la volatilidad a nuestras series financieras objeto de estudio, series en rentabilidades, definimos esta como la variabilidad de la rentabilidad de una acción con respecto a su media. De la anterior definición se deriva su importancia, pues podemos relacionarla con el riesgo al que están sujetas las ganancias de invertir en acciones. El problema objeto de estudio radica en que la volatilidad no es observable directamente y es importante conocer el comportamiento de la misma, comportamiento que se supone en numerosas ocasiones, constante en el tiempo (varianza homocedástica), simplemente mediante el cálculo de la desviación típica muestral como indicador de la volatilidad. Sin embargo, verificaremos características de nuestras series financieras que muestran la existencia de volatilidad cambiante y posibilitan por tanto su modelización y predicción, mediante los modelos que tengan en cuenta la heterocedasticidad de nuestras series y nos ayuden a modelizarlas, como son los modelos ARCH propuestos por Engle (1982), seguidos de una generalización de los mismos llamados modelos GARCH (Bollerslev, 1986) y sus correspondientes variantes (EGARCH, GJR).

Para llevar a cabo este estudio, hemos escogido empresas de distintos sectores económicos. Dentro del sector financiero hemos seleccionado a Goldman Sachs, del sector textil seleccionamos a Nike, dentro del sector automovilístico la escogida ha sido Ford Motor, de la industria electrónica nos quedamos con Apple y por último de la industria petrolera hemos seleccionado a Schlumberger.

Además del estudio de estas cinco series de rentabilidades, construiremos una cartera equiponderada de estos cinco activos y elaboraremos el mismo análisis de esta que de las anteriores series.

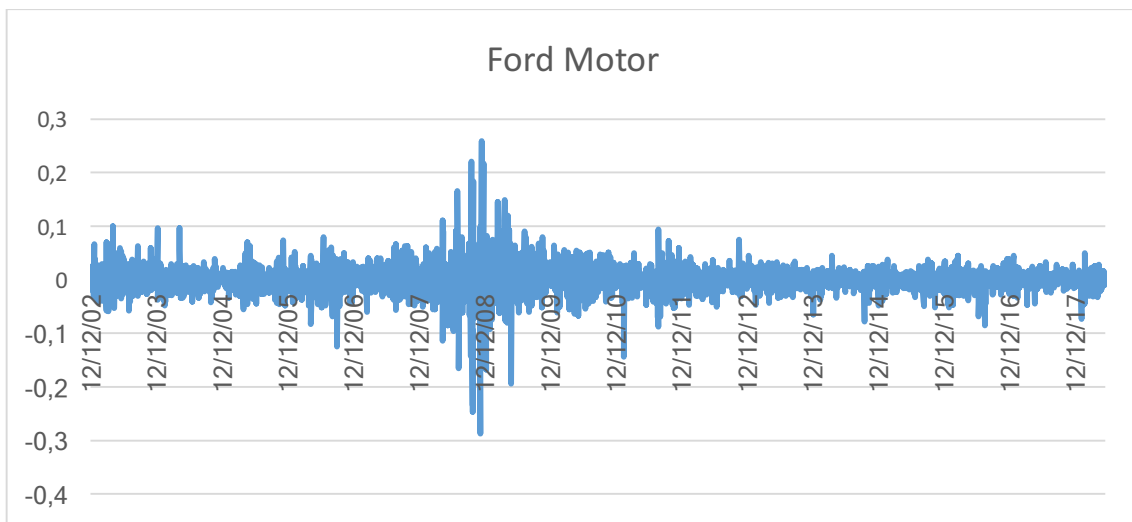
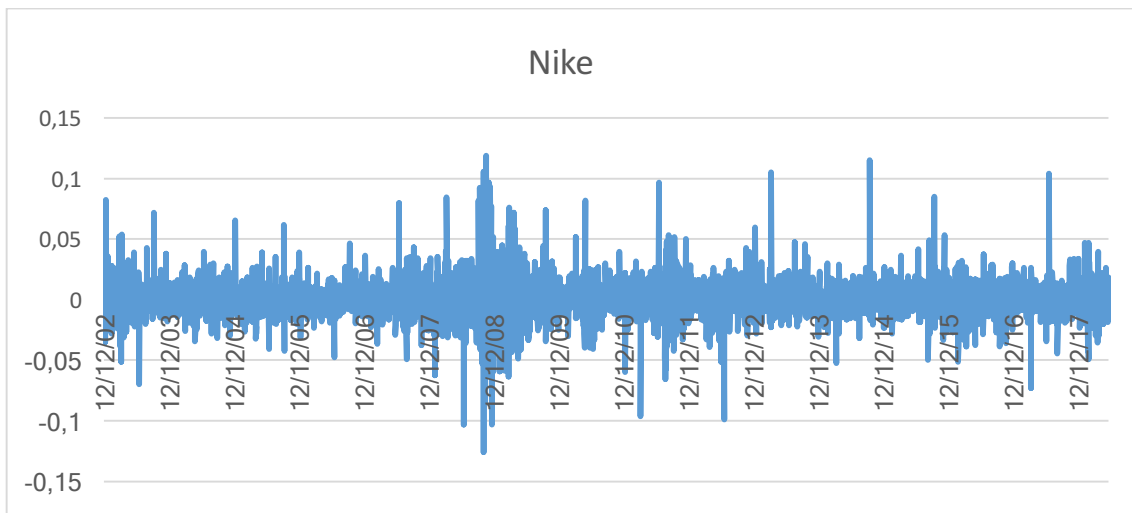
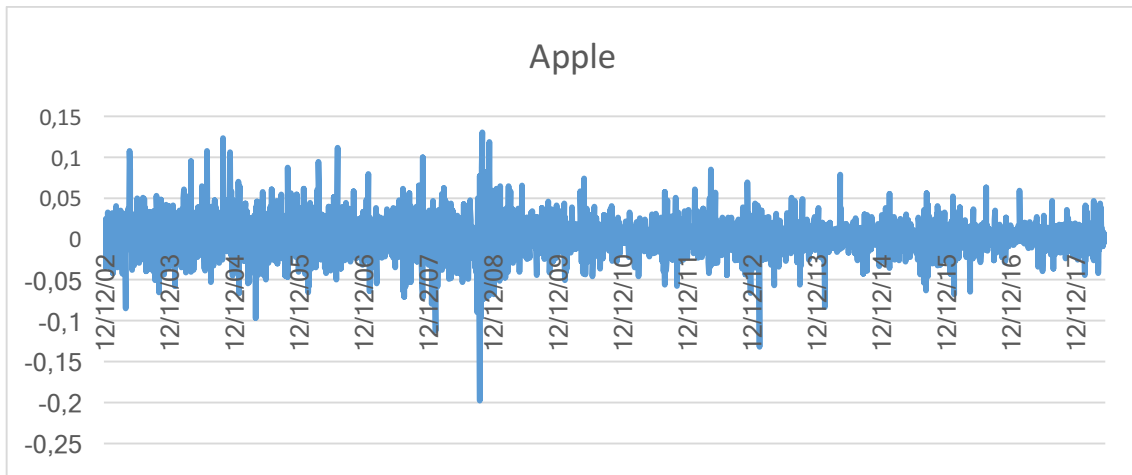
En primer lugar, elaboraremos un análisis descriptivo de las seis series (las cinco individuales y la cartera equiponderada), completándolo con un conjunto de medidas de asimetría y curtosis más robustas que no se ven influenciadas por los valores atípicos y por tanto pueden darnos una mejor estimación de asimetría y curtosis (*Kim and White 2004*). Tras haber verificado la estacionariedad de nuestras series, llevaremos a cabo la modelización de la media, sin embargo, dados los cambios que pueden presentarse a la hora de estudiar un modelo como consecuencia de los valores atípicos, el siguiente paso en nuestro trabajo será tratar dichas observaciones atípicas y construir los nuevos modelos adecuados tras la corrección. En el cuarto apartado realizaremos la modelización de la heterocedasticidad condicional, tras haber contrastado la presencia de esta mediante un contraste ARCH. A continuación de la presentación de los resultados relevantes, construiremos carteras de mínima varianza global con estas cinco series financieras, teniendo en cuenta para ello la influencia que tiene la estructura heterocedástica de nuestras acciones. Finalmente, expondremos la conclusión del trabajo.

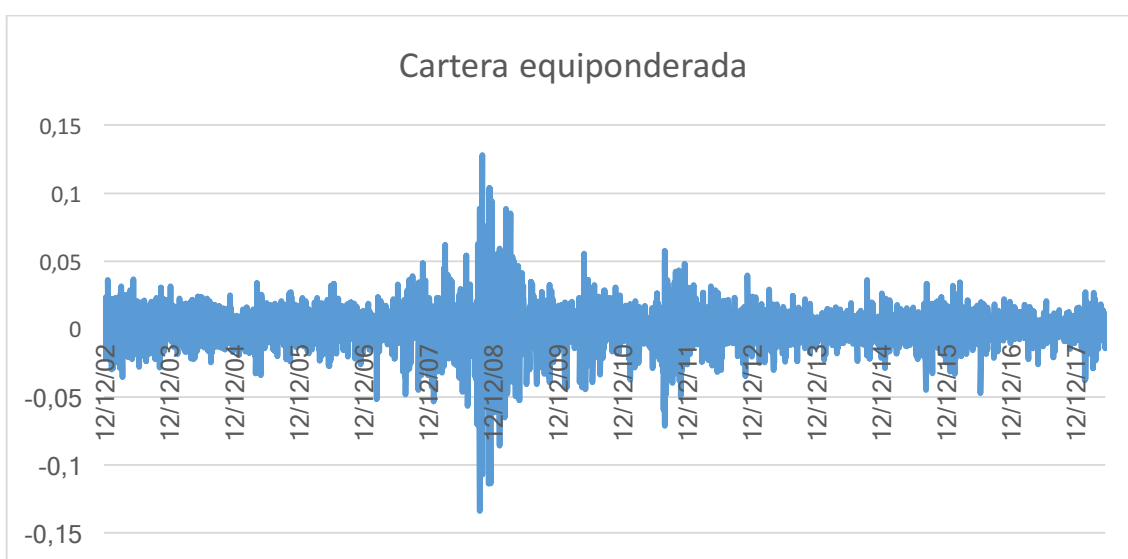
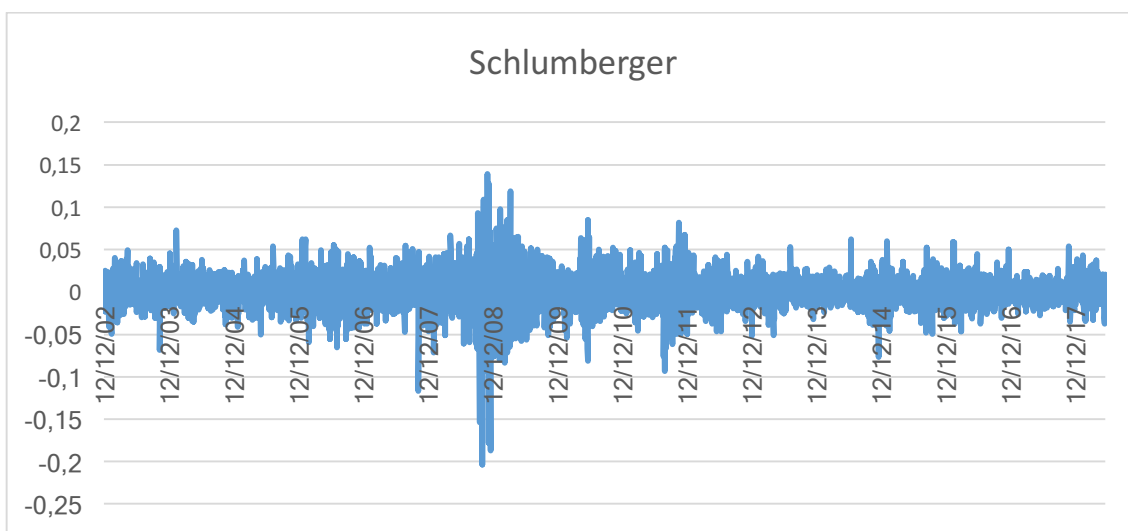
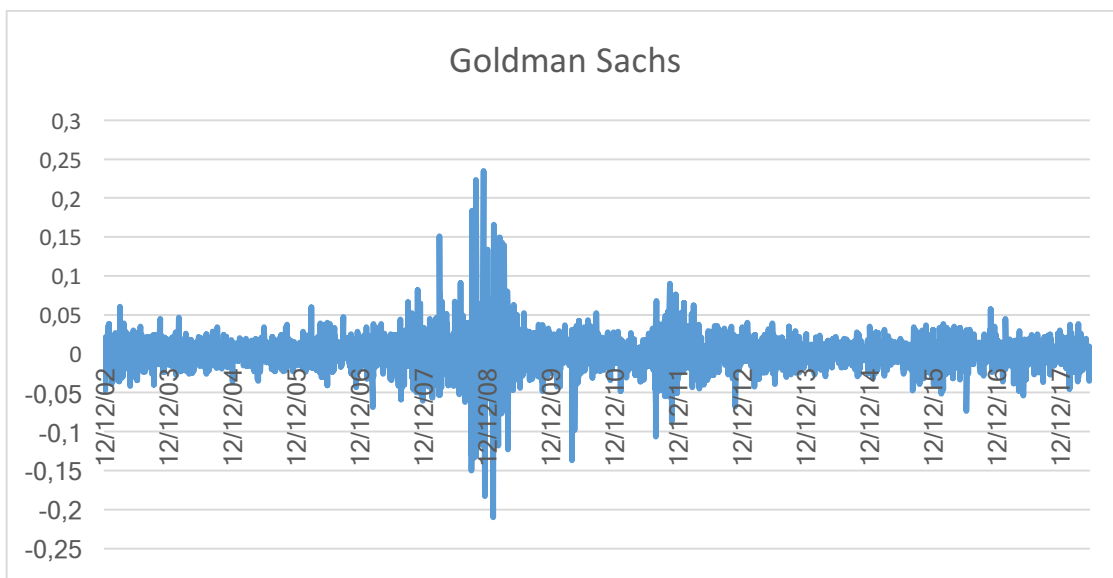
2. Descripción de las series a estudiar

Trabajaremos con series temporales en rentabilidades, transformadas de los precios diarios de las distintas acciones, la transformación que se ha llevado a cabo para obtener las rentabilidades diarias a partir de los precios ha sido: $\ln(P_t/P_{t-1})$.

En general, las series diarias tienen poca estructura en media, pero como analizaremos más tarde en las observaciones al cuadrado se observa una gran estructura de dependencia, lo que coincide con la varianza no constante que se puede observar en los gráficos de cada una de las series, pues presentan rachas de mayor variabilidad, seguidas de rachas de menor variabilidad, dato característico de las series financieras. Además, veremos cómo su distribución no es normal, pues muestran asimetría y exceso de curtosis, son leptocúrticas.

A continuación, observamos, los gráficos de la serie en rentabilidades, todas ellas aparentemente estacionarias lo que más adelante contrastaremos mediante un contraste Dickey-Fuller. Además, en todas podemos percibir un periodo más volátil que coincide con la crisis del 2008.





Fuente: Elaboración propia

2.1 Estadísticos descriptivos habituales.

Apple

Media	Desviación Típica	Mínimo	Máximo	Coeficiente de asimetría	Exceso de curtosis
0,0013188	0,021149	-0,19747	0,13019	-0,05227	5,54334

Nike

Media	Desviación Típica	Mínimo	Máximo	Coeficiente de asimetría	Exceso de curtosis
0,000666	0,016419	-0,12596	0,11876	0,31831	8,10707

Ford Motor

Media	Desviación Típica	Mínimo	Máximo	Coeficiente de asimetría	Exceso de curtosis
0,0000454	0,026091	-0,287682	0,2586504	-0,056803	18,52039

Goldman Sachs

Media	Desviación Típica	Mínimo	Máximo	Coeficiente de asimetría	Exceso de curtosis
0,0002923	0,0219606	-0,21022	0,2348178	0,272836	17,36442

Schlumberger

Media	Desviación Típica	Mínimo	Máximo	Coeficiente de asimetría	Exceso de curtosis
0,0002905	0,02126	-0,203391	0,139017	-0,49324	8,26165

Cartera equiponderada

Media	Desviación Típica	Mínimo	Máximo	Coeficiente de asimetría	Exceso de curtosis
0,0005227	0,015315	-0,13388	0,128116	-0,32121	9,831616

Tablas estadísticos principales. Elaboración propia

Un hecho a destacar es que todos los activos tienen una rentabilidad media alrededor de cero, siendo la que peor rentabilidad ofrece Ford Motor, con una rentabilidad diaria de 0,045%, seguida de Schlumberger. Al contrario, la acción que otorga más rentabilidad es Apple con una rentabilidad diaria del 0,13%.

Por otra parte, la acción más volátil es Ford Motor y la que menos volatilidad ofrece es la cartera equiponderada, lo que nos indica que hemos diversificado el riesgo de forma correcta.

Además, Ford Motor es la que presenta tanto valores mínimos como máximos más grandes. Siguiendo esta interpretación, Ford Motor es, por tanto, la opción más arriesgada.

Cabe destacar, que no siguen una distribución normal, pues todas presentan exceso de curtosis (curtosis >3), observamos además, como los valores que toma este estadístico para cada una de las series, son muy grandes, hecho que trataremos en el siguiente apartado, al compararlo con otras medidas más robustas. Tampoco son simétricas, Ford, Schlumberger, Apple y la cartera equiponderada formada por estas cinco presentan asimetría negativa, al contrario que las restantes. Destacamos que Apple y Ford presentan un coeficiente de asimetría bastante pequeño, aunque negativo, es por ello que pueden asemejarse a distribuciones simétricas en los histogramas de cada una de las series, como podemos ver en el anexo, 8.1.

2.2 Estadísticos robustos

Los estadísticos anteriores pueden estar dándonos un resultado incorrecto debido a que incorporan la media en su descripción, medida que está muy influenciada por valores atípicos, por tanto, ante un valor alto de estos estadísticos, no sabremos si realmente son altos o simplemente están muy influenciados por estos valores extremos. Además, los momentos de tercer y cuarto orden (asimetría y curtosis) están elevados a las potencias tres y cuatro respectivamente, de manera que la influencia de valores atípicos es mucho mayor, pues si la rentabilidad toma valores muy grandes en valor absoluto, al estar elevado a una potencia grande, el valor que toma el estadístico es mucho mayor.

Los coeficientes tradicionales de asimetría y curtosis son respectivamente:

$$SK_1 = E \left(\frac{y_t - \mu}{\sigma} \right)^3 \quad KR_1 = E \left(\frac{y_t - \mu}{\sigma} \right)^4$$

Debido a la limitación señalada, son muchos los trabajos que tratan de estudiar otro tipo de estimadores de asimetría y curtosis que utilizan un criterio diferente de forma que no se vean influenciados por los valores atípicos y nos muestren un resultado más correcto y cercano a la realidad, *Kim and White (2004)*.

Teniendo en cuenta la no influencia de los atípicos en los cuantiles, Bowley (1920) propuso entonces un estimador de asimetría basado en estos:

$$SK_2 = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$$

Otro coeficiente robusto de asimetría que se propone es el siguiente (Kendall and Stuart, 1977).

$$SK_3 = \frac{\mu - Q_2}{\sigma}$$

Donde, $Q_1 = F^{-1}(0,25)$; $Q_2 = F^{-1}(0,5)$; $Q_3 = F^{-1}(0,75)$

Por su parte, las medidas robustas de curtosis propuestas, basadas también en cuantiles son:

- Moors (1988)

$$KR_2 = \frac{(E_7 - E_5) + (E_3 - E_1)}{E_6 - E_2}$$

Donde E_i es el octil iésimo, es decir, $F^{-1}\left(\frac{i}{8}\right)$

- Crow and Siddiqui (1967)

$$KR_3 = \frac{F^{-1}(0,975) - F^{-1}(0,025)}{F^{-1}(0,75) - F^{-1}(0,25)}$$

Estos estimadores robustos, como vemos, están basados en cuantiles, no quedando afectados de esta forma por los valores atípicos.

Si comparamos los resultados obtenidos anteriormente con los estadísticos habituales $(\widehat{SK}_1, \widehat{KR}_1)$, con los resultados que obtenemos al calcular la asimetría y curtosis de forma robusta $(\widehat{SK}_2, \widehat{SK}_3, \widehat{KR}_2, \widehat{KR}_3)$ observamos que disminuye la magnitud de la asimetría y curtosis, por lo que antes el valor que obteníamos podría estar dándonos un resultado incorrecto.

	Apple	Nike	Ford	Goldman Sachs	Schlumberger	Cartera equiponderada
\widehat{SK}_1	-0,05228	0,31831	-0,0568	0,272836	-0,49324	-0,32121
\widehat{SK}_2	0,052981	-0,01299	-0,01605	-0,003718	0,034472	0,0037597
\widehat{SK}_3	0,013035	0,005316	0,001739	-0,011675	0,0058649	-0,019545
\widehat{KR}_1	5,543344	8,107067	18,5204	17,36442	8,261656	9,831616
\widehat{KR}_2	0,253965	0,150479	0,289288	0,192871	0,1473838	0,234192
\widehat{KR}_3	1,248221	1,156101	1,539987	1,2673194	0,8918255	1,3022194

Fuente: elaboración propia

Debido a estos problemas con los estadísticos habituales, puede resultar interesante observar e intervenir, como realizaremos en apartados posteriores, los valores extremos en las series ya que pueden distorsionar la trayectoria de las mismas y podemos obtener resultados muy diferentes en el caso que decidamos o no, tratarlos.

Es por ello que tras conocer los modelos que siguen nuestras series originales, trataremos estos valores, para evitar que distorsionen la verdadera evolución de estas.

La idea es que una vez corregidos los valores atípicos, los valores que tomen los estadísticos habituales cambien y que los estadísticos robustos, a su vez no cambien su valor al corregir los valores atípicos.

3. Análisis y modelización de la media

Los gráficos de nuestras cinco series financieras, vistos anteriormente, nos dan una idea sobre la dinámica de estas. Todas ellas son estables en torno a un valor medio, por lo que a primera vista parecen todas estacionarias. No obstante, lo verificamos mediante un contraste de raíz unitaria, en concreto el contraste aumentado Dickey-Fuller (anexo 8.2), en el que se rechaza la hipótesis nula de existencia de raíces unitarias para todas nuestras series.

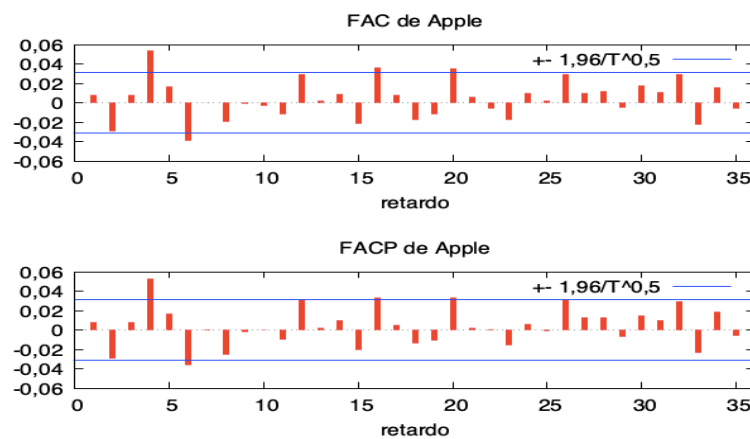
3.1 Modelización de la media

El primer paso ahora que sabemos que nuestra serie es estacionaria es modelizar la media con el objetivo de entender y predecir valores futuros de la serie. La modelización de series temporales se realiza a partir de los modelos autorregresivos de media móvil,

llamados ARMA (p,q). Estos modelos están compuestos por una parte autorregresiva, cuyo orden viene determinado por p, y una parte media móvil con orden q. Con la modelización queremos encontrar los modelos lineales que han generado nuestros datos.

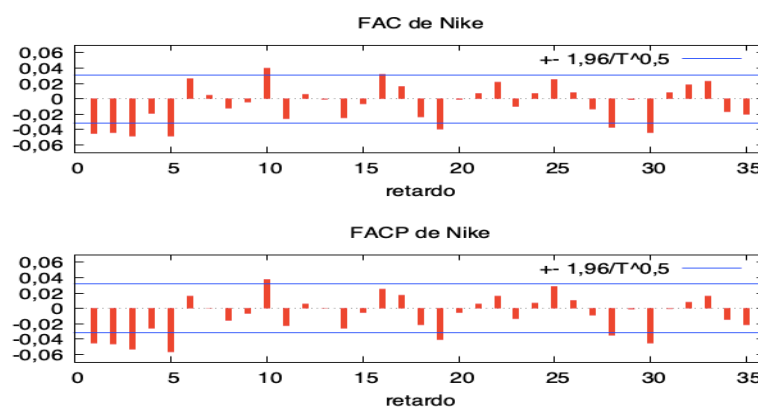
Para ver qué modelo siguen nuestras series es necesario visualizar el correlograma simple y parcial de estas para poder tener una idea de que modelo puede estar generando nuestros datos e ir probando hasta encontrar el adecuado, es decir, aquel que sea significativo, tenga un menor criterio de akaike y deje a los residuos del modelo estimado sin estructura alguna, es decir, con un correlograma que refleje un ruido blanco.

Apple



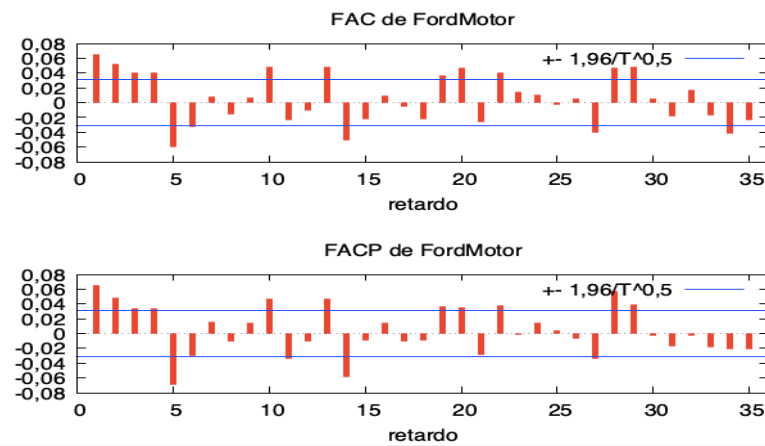
Fuente:Elaboración propia

Nike



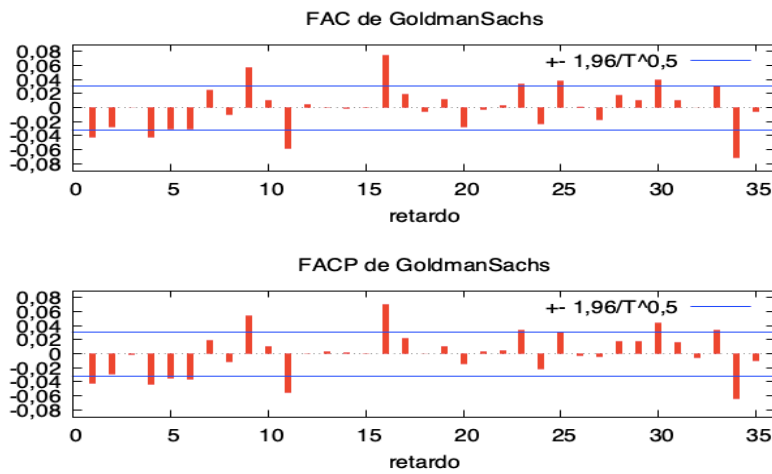
Fuente: Elaboración propia

Ford-Motor



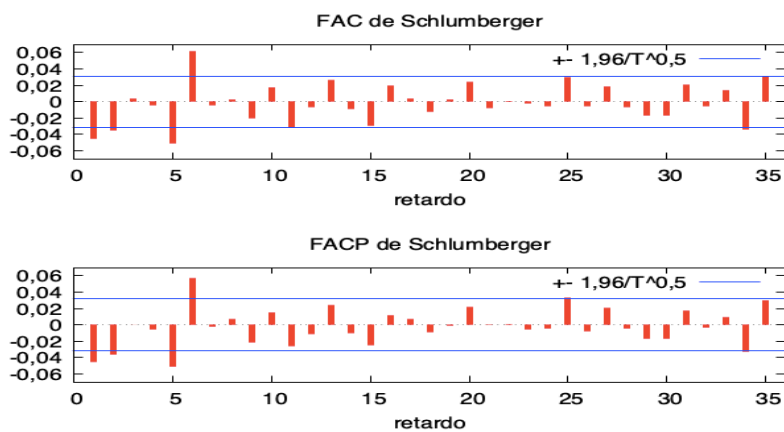
Fuente: Elaboración propia

Goldman Sachs



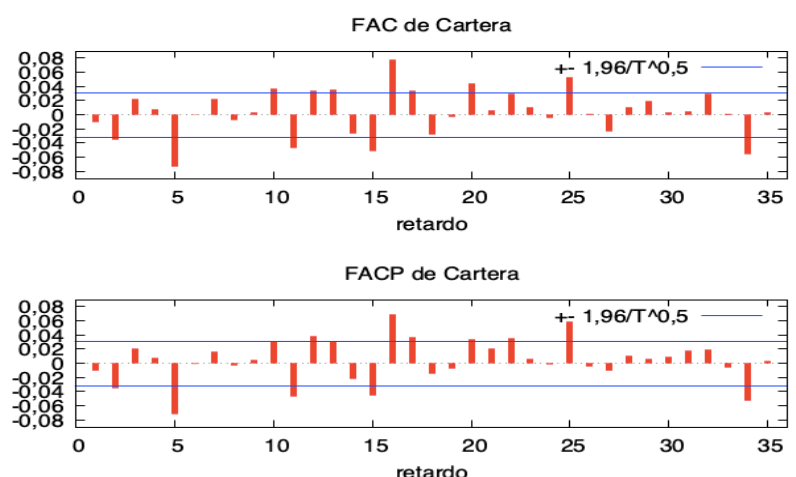
Fuente: Elaboración propia

Schlumberger



Fuente: Elaboración propia

Cartera equiponderada



Fuente: Elaboración propia

Aunque en general, las series temporales de alta frecuencia como las nuestras (datos diarios) se caracterizan por tener poca estructura en media, presentan poca autocorrelación, hemos encontrado modelos que pueden ser adecuados para cada una de las series anteriores, contrastando en todos los modelos tentativos que ha sido necesario (procesos mixtos ARMA(p,q)) la existencia de raíces comunes y por tanto la posibilidad de que el modelo que parece adecuado, esté sobreparametrizado.

Estos modelos son:

ARMA(2,2) para Apple

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \phi Y_{t-2} + u_t + \theta_1 \mu_{t-1} + \theta_2 \mu_{t-2}$$

Apple	ϕ_2	θ_2
Coefficiente	-0,853911	0,821783
Desviación típica	0,100478	0,110263
P-valor	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Dada la similitud de las raíces, se ha contrastado la posibilidad de sobreparametrización, obteniendo incluso verificándolo con la selección automática del modelo adecuado que realiza el programa R, que podemos modelizar la anterior serie

financiera mediante el modelo propuesto, ARMA (2,2) puesto que es el modelo adecuado. Suponemos entonces que $\theta \neq \phi$.

ARMA(1,1) para Nike

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Nike	ϕ_1	θ_1
Coeficiente	0,711441	-0,775411
Desviación típica	0,0699736	0,0626972
P-valor	0 ***	0***

Fuente: Elaboración propia

ARMA(1,1) para Ford

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Ford	ϕ_1	θ_1
Coeficiente	0,577269	-0,509024
Desviación típica	0,0972432	0,102055
P-valor	0 ***	0***

Fuente: Elaboración propia

MA(2) para Schlumberger

$$Y_t = \theta_1 \mu_{t-1} + \theta_2 \mu_{t-2}$$

Schlumberger	θ_1	θ_2
Coeficiente	-0,0472410	-0,0347796
Desviación típica	0,0160202	0,0160804
P-valor	0,0032 ***	0,0306 **

Fuente: Elaboración propia

ARMA(1,1) para Goldman Sachs

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Goldman Sachs	ϕ_1	θ_1
Coeficiente	0,690779	-0,736232
Desviación típica	0,0887511	0,0827086
P-valor	0 ***	0***

Fuente: Elaboración propia

ARMA(1,1) para la cartera equiponderada

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

Cartera equiponderada	Constante	ϕ_1	θ_1
Coeficiente	0,000523	0,706253	-0,724241
Desviación típica	0,00023	0,169009	0,164354
P-valor	0,0232**	0 ***	0***

Fuente: Elaboración propia

No obstante tras contrastar la posibilidad de que el anterior modelo tentativo tenga raíces comunes, obtenemos que el modelo no tiene estructura, pues $(1 - \phi_1 B) = (1 - \theta_1 B)$, quedándonos por tanto con que nuestra serie sigue un proceso ruido blanco:

Cartera equiponderada	Constante
Coeficiente	0,000523
Desviación típica	0,000245
P-valor	0,0332**

Fuente: Elaboración propia

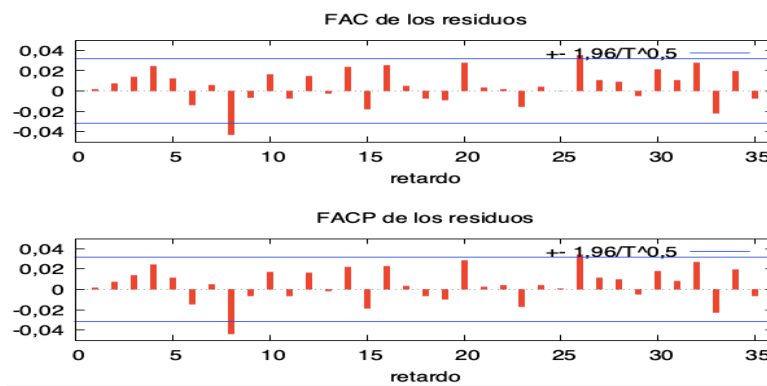
Aunque los correlogramas vistos anteriormente, no sean los típicos de este tipo de modelos, pueden ser adecuados, ya que como contamos con rentabilidades diarias

podemos encontrarnos muchas distorsiones en este tipo de gráficos. Tras probar distintos modelos que podrían coincidir con los adecuados que explican nuestras series, los anteriores son los que mejor se aproximan teniendo en cuenta los criterios antes comentados.

Una vez hemos modelizado la media, para saber si estos modelos seleccionados son los correctos, el correlograma de los residuos tiene que reflejar un proceso no correlacionado.

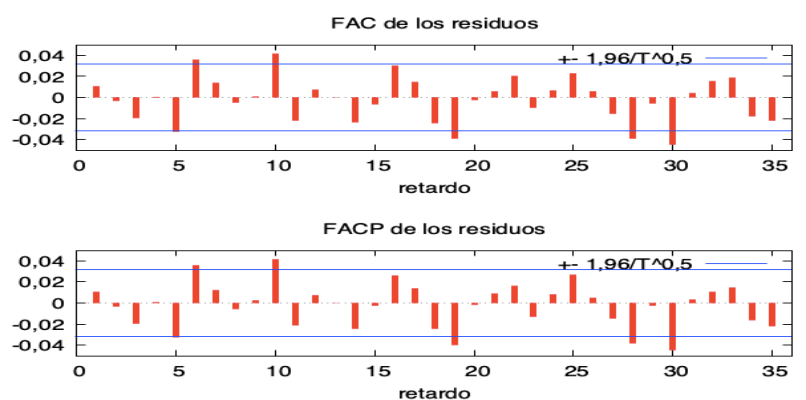
A continuación, podemos ver como efectivamente los residuos que obtenemos de cada uno de los modelos estimados, no tienen estructura.

Apple



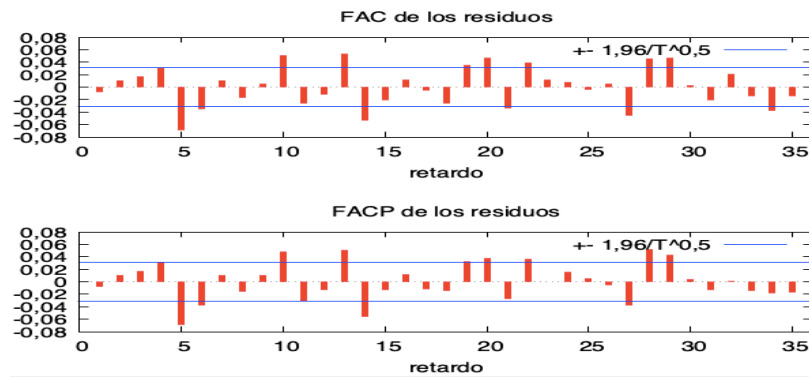
Fuente: Elaboración propia

Nike



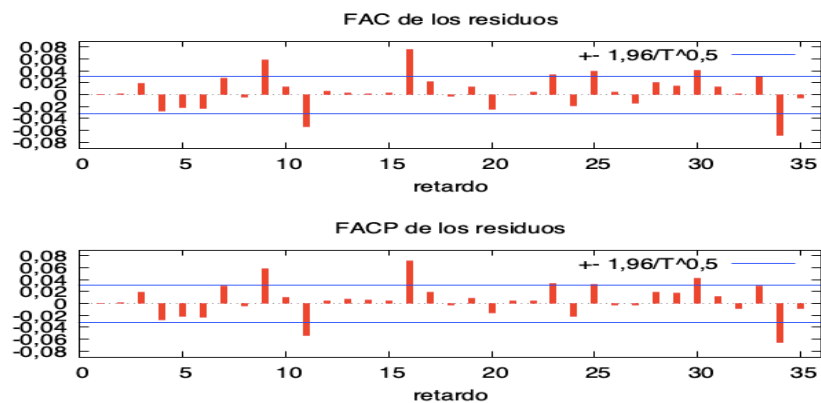
Fuente: Elaboración propia

Ford Motor



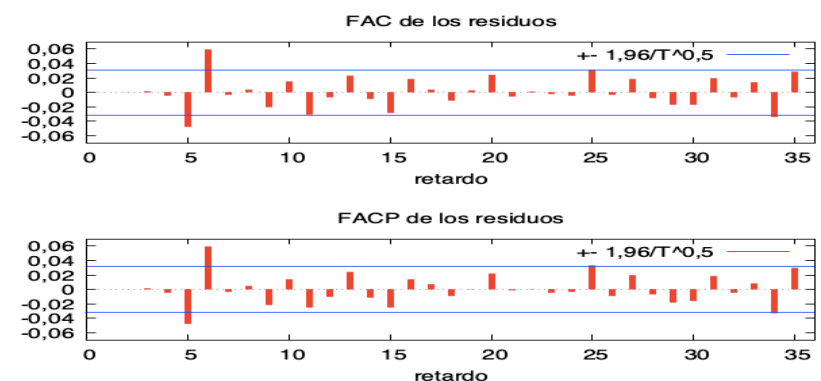
Fuente: Elaboración propia

Goldman Sachs



Fuente: Elaboración propia

Schlumberger



Fuente: Elaboración propia

Aunque se ha capturado buena parte de la estructura, observamos como alguna correlación sigue siendo significativamente distinta de cero. Esto puede deberse a la presencia de datos atípicos que pueden provocar un impacto difícil de captar por los modelos ARMA tradicionales.

Dada la repercusión de estos valores extremos en los estadísticos tradicionales antes comentados y las distorsiones que pueden generar en la trayectoria de las series, provocando dificultades a la hora de encontrar el modelo que sigue cada una de estas, parece interesante saber cómo corregirlos, lo que se realiza en el siguiente apartado.

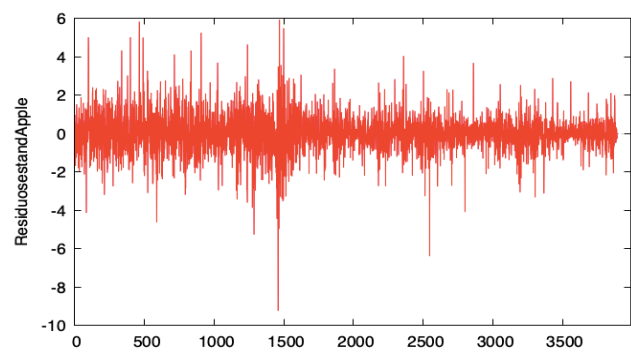
3.2 Intervención de valores atípicos

Con el objetivo de mejorar la precisión de las estimaciones vamos a proceder a identificar, cuantificar y corregir los valores que consideremos atípicos (outliers).

Para llevar a cabo esta intervención, en primer lugar, estandarizamos los residuos resultantes de cada modelo ARMA preliminar, es decir les restamos la media y dividimos este resultado entre su desviación típica. Homogeneizamos porque así podemos entender mejor los resultados ya que sabremos cuantas veces es mayor o menor el residuo que la desviación típica, de manera que si esta variable (residuos estandarizados) toma valores, en valor absoluto, muy altos, podría considerarse un valor atípico. Para considerar un valor atípico observamos la serie de residuos estandarizados para ver en qué intervalo se mueve generalmente y poder entonces sacar conclusiones sobre qué valores consideraremos valor atípico en cada una de las series.

Cabe destacar que al contar con datos diarios, y como veremos a continuación, a pesar de que la mayoría de las observaciones se mueven alrededor de un valor medio, hay muchas observaciones concretas que se desvían. No obstante, solo consideraremos valor atípico unas pocas observaciones cuyos residuos estandarizados tomen valores excesivamente altos.

Apple



Fuente: Elaboración propia

Hemos considerado, para esta serie, como valor atípico aquellos valores que sean en valor absoluto mayores que 6, pues como vemos, aunque la mayor parte de los datos se encuentren entre (-2,2) existen muchos picos que se sobresalen como consecuencia de la variabilidad de los datos en frecuencia diaria. Es por ello que solo consideramos los más altos. Así, los valores atípicos considerados han sido los siguientes:

29/09/2008: Con un valor de -9,22 caída que se relaciona con la crisis financiera de 2008, pues la empresa se mantuvo en auge desde el estallido de esta hasta dicho día, donde experimentó la caída esperada tras afectarle dicha crisis.

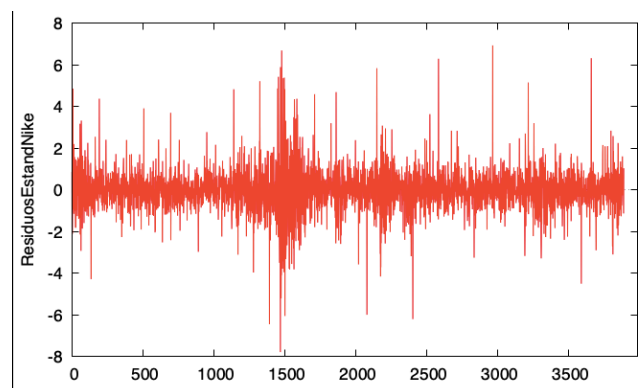
24/01/2013: Con un valor de -6,38, como consecuencia de la publicación del informe con los últimos resultados de la compañía, informe que no mostraba las ganancias esperadas por los inversores, provocando esto dicha caída en bolsa de las acciones de Apple.

El modelo que sigue dicha serie de rentabilidades tras la corrección de los anteriores valores, cambia, antes veíamos que parecía reflejar un modelo ARMA(2,2), ahora es más adecuado un ARMA(1,1)

Apple	α_0	ϕ	θ	$\beta_{29-9-08}$	$\beta_{24-1-13}$
Coef	0,0014	-0,7216	0,737	-0,19986	-0,13306
Desv	0,0003	0,2537	0,2476	0,02081	0,02079
P.valor	0***	0,0044***	0,0029***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Nike



Fuente: Elaboración propia

Al igual que en la serie anterior, consideraremos valor atípico aquel valor de los residuos estandarizados que sea mayor, en valor absoluto, que 6.

Los valores atípicos encontrados con una causa lógica y significativos al modelo han sido los dos siguientes:

26/06/2008 con un valor de -6,43

15/10/2008 con un valor de -7,777

28/10/2008 con un valor de 6,69

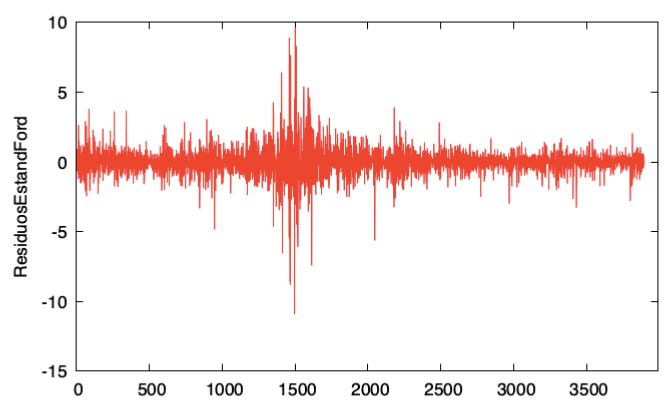
Atípicos que podemos explicar como consecuencia de la crisis financiera iniciada en dicho año.

El modelo que sigue esta serie no cambia tras la intervención de los anteriores valores, sigue por tanto un ARMA(1,1).

Nike	ϕ	θ	$\beta_{26-06-08}$	$\beta_{15-10-08}$	$\beta_{28-10-08}$
Coeficiente	0,7802	-0,8322	-0,1255	0,1106	-0,1066
Desv	0,0629	0,0557	0,01626	0,01607	0,01598
P.valor	0***	0***	0***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Ford Motor



Fuente: Elaboración propia

En este caso, debido a que existen valores muy altos, como podemos ver en el gráfico, tomaremos como atípicos aquellos que sobrepasen el valor de 8 en valor absoluto.

Todos ellos, se concentran en el periodo de la crisis, sin embargo, solo hemos tratado los más relevantes.

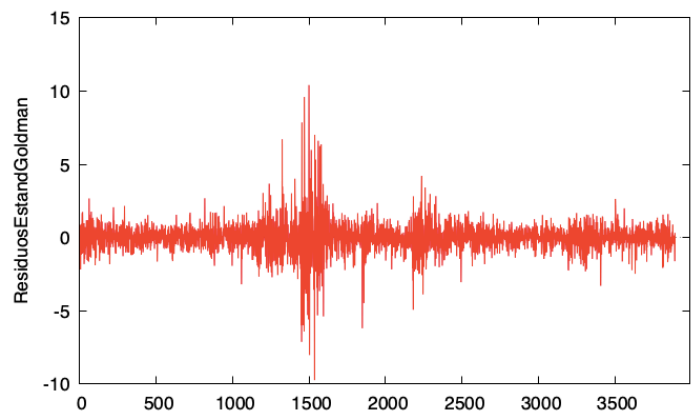
30/09/2008 con un valor de 8,91
 09/10/2008 con un valor de -8,80
 19/11/2008 con un valor de -10,91
 26/11/2008 con un valor de 9,66

El modelo que resulta más adecuado tras corregir dichos valores atípicos sigue siendo el mismo que anteriormente, un ARMA(1,1)

Ford	ϕ	θ	$\beta_{30-09-08}$	$\beta_{9-10-08}$	$\beta_{19-11-08}$	$\beta_{26-11-08}$
Coef	0,6521	-0,5829	0,2465	-0,2307	-0,2946	0,2353
Desv	0,0887	0,0947	0,025	0,0247	0,0246	0,0249
P.valor	0***	0***	0***	0***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Goldman Sachs



Fuente: Elaboración propia

Podemos considerar valores atípicos las siguientes fechas, todas ellas relacionadas con la crisis iniciada en 2008:

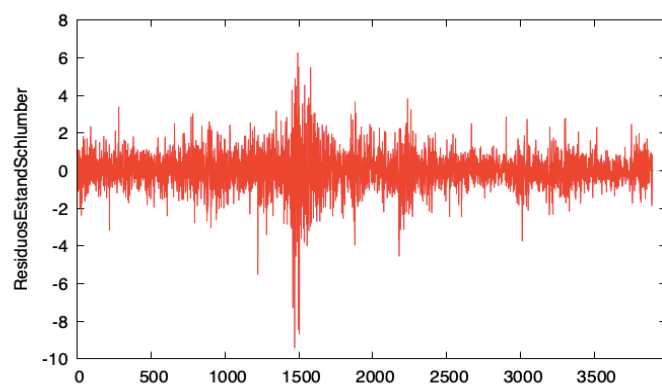
24-11-2008 con un valor de 10,41
 1-12-2008 con un valor de -8,01
 20-1-09 con un valor de -9,73

En este caso, sí cambia el modelo al tratar los anteriores outliers, ya que antes considerábamos que el modelo que seguía nuestra serie era un ARMA(1,1), sin embargo, ahora el modelo adecuado es un MA(1) como vemos a continuación:

Goldman Sachs	θ	$\beta_{24-11-2008}$	$\beta_{1-12-2008}$	$\beta_{20-01-2009}$
Coeficiente	-0,0374	0,2381	-0,1824	-0,2044
Desviación	0,016	0,0212	0,0211	0,0213
P.valor	0,0228**	2,67e-29***	6,41e-18***	7,94e-22***

Fuente: Elaboración propia

Schlumberger



Fuente: Elaboración propia

Los valores atípicos más pronunciados, como podemos ver en el gráfico, se concentran en 2008. Intervenimos solo en los más pronunciados que son los siguientes:

15-10-2008 con un valor de -9,42

13-11-2008 con un valor de 6,227

20-11-2008 con un valor de -8,445

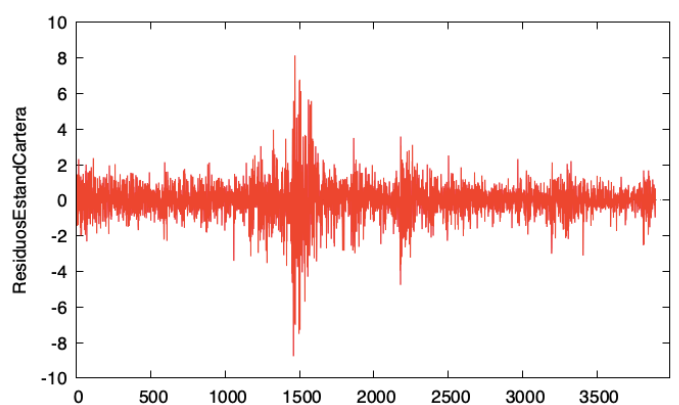
1-12-2008 con un valor de -8,667

Al tener en cuenta estos outliers, el modelo adecuado también cambia con respecto a lo que veíamos anteriormente (MA(2)), nuestro modelo adecuado ahora es un ARMA(1,1).

Schlumberger	ϕ	θ	$\beta_{15-10-08}$	$\beta_{13-11-08}$	$\beta_{20-11-08}$	$\beta_{1-12-08}$
Coeficiente	0,873	-0,892	-0,2066	0,1372	-0,1763	-0,1851
Desviación	0,087	0,08	0,0205	0,0204	0,0205	0,0205
P.valor	0***	0***	0***	0***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Cartera equiponderada



Fuente: Elaboración propia

Los valores atípicos de esta cartera, se encuentran generalmente en el periodo de crisis financiera, esto es lógico, pues todos los activos que la componen presentaban valores extremos en dichas fechas. Hemos tratado simplemente los siguientes:

29/09/2008 con un valor de -8,776

13/10/2008 con un valor de 8,33

19/11/2008 con un valor de -7,449

1/12/2008 con un valor de -7,46

La intervención de los atípicos en este caso no tiene repercusión en el modelo, pues esta serie no tenía estructura:

Cartera	Constante	$\beta_{29-09-08}$	$\beta_{13-10-08}$	$\beta_{19-11-08}$	$\beta_{1-12-08}$
Coeficiente	0,00058	-0,13446	0,1275	-0,11415	-0,1143
Desviación	0,00023	0,0148	0,0148	0,0148	0,0148
P.valor	0,0141**	0***	0***	0***	0***

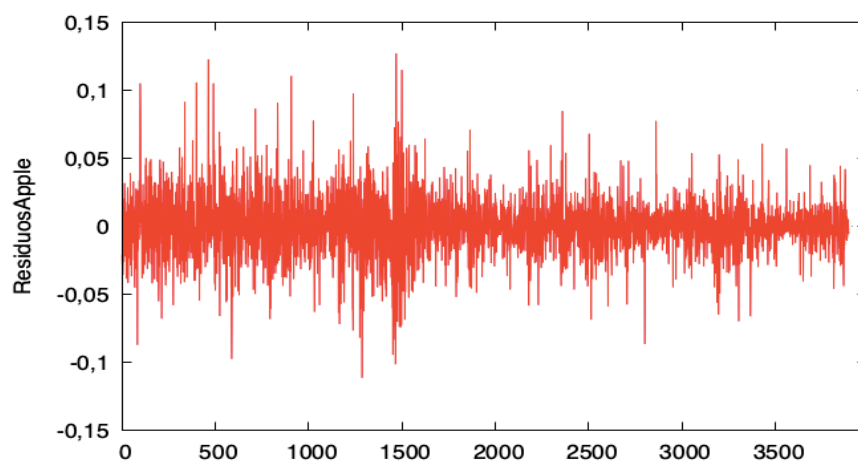
Fuente: Elaboración propia

4. Presencia de heterocedasticidad condicional

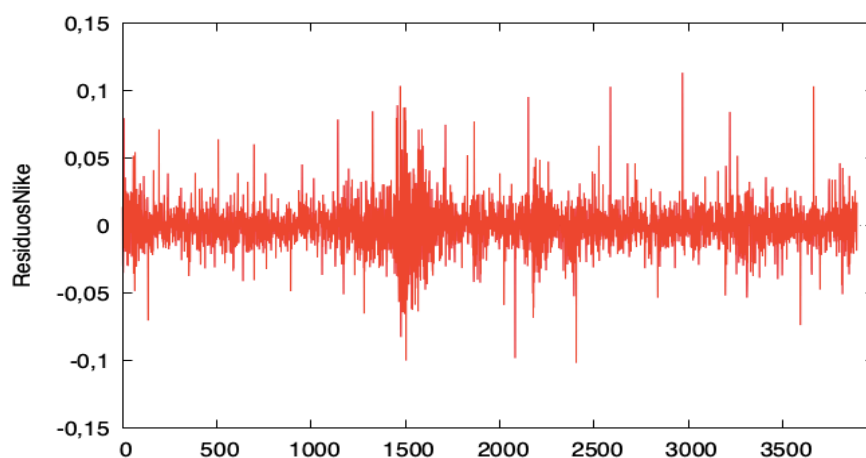
Los modelos lineales ARMA, suponen varianza marginal y condicional constantes, lo que no parece adecuado, ya que como veíamos en los gráficos temporales de nuestras series, hay periodos mucho más volátiles que otros.

Hemos visto, tras modelizar la media en los apartados anteriores, que los correlogramas de los residuos, no reflejaban estructura alguna. Este hecho, nos informa de que hemos modelizado bien la media. Los modelos ARMA, son modelos lineales, por su parte, los correlogramas miden la estructura lineal, lo que quiere decir que estos correlogramas, al reflejar una estructura ruido blanco, pueden mostrarnos que no existe autocorrelación en el modelo lineal, pero no nos dice nada sobre si existe correlación de forma no lineal. En los residuos, sigue el efecto de la variabilidad, pues este tipo de modelos no pueden tenerla en cuenta. Si lo que representamos no es el correlograma de los residuos, sino únicamente el gráfico de los residuos, estos recogerán todo el efecto de la variabilidad, ya que esta no se ha tenido en cuenta en el modelo, pues este tipo de modelos no pueden recoger la variabilidad.

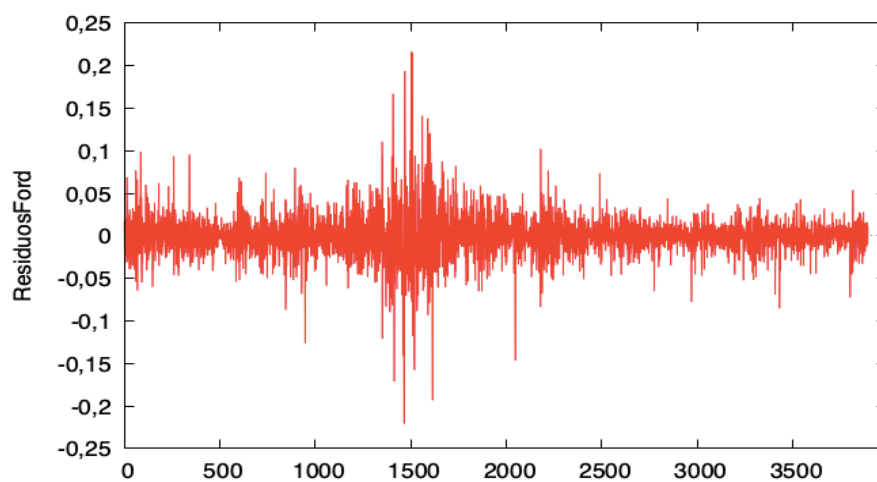
A continuación, observamos los gráficos de los residuos de los modelos especificados anteriormente para cada una de las series:



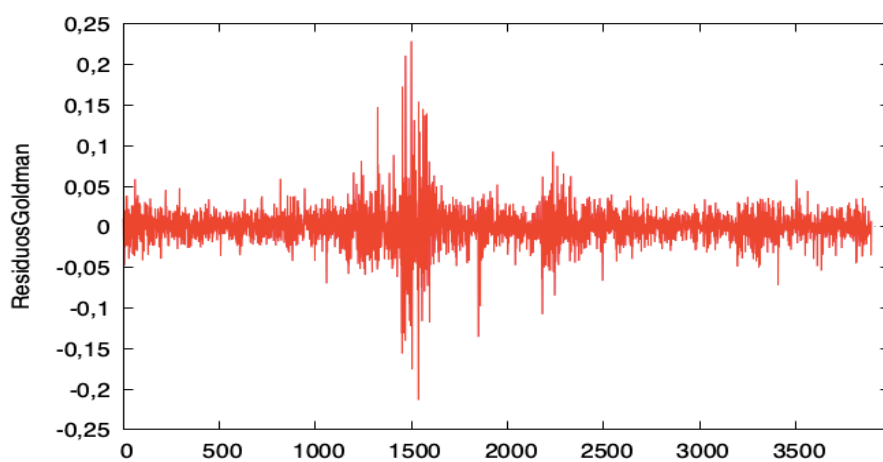
Fuente: Elaboración propia



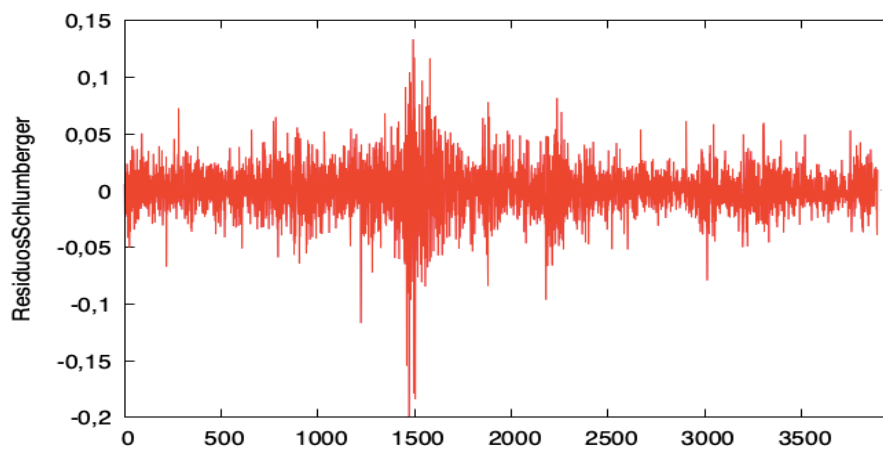
Fuente: Elaboración propia



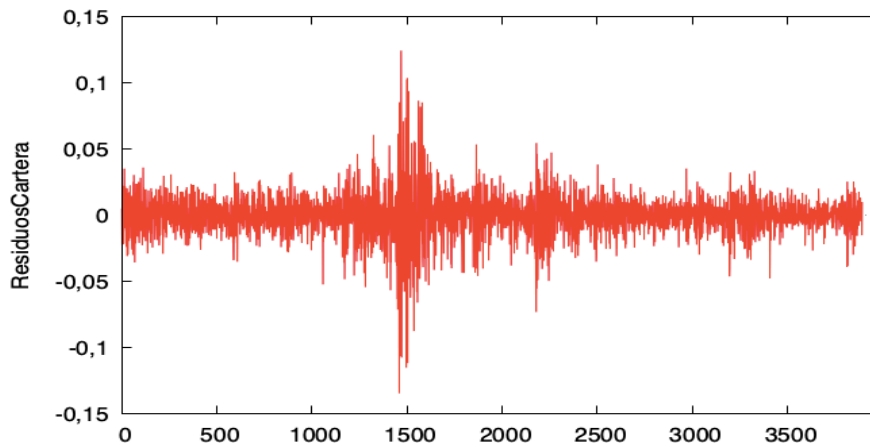
Fuente: Elaboración propia



Fuente: Elaboración propia



Fuente: Elaboración propia



Fuente: Elaboración propia

En los gráficos anteriores observamos como el efecto de la variabilidad sigue estando presente, dado que hay tramos con más volatilidad que otros, no es correcto asumir una varianza constante.

Las series financieras no presentan, en general, una varianza constante. Es importante, por tanto, tener en cuenta modelos que recojan la estructura de la volatilidad en estas series con estructura heterocedástica para poder modelar tanto media como varianza y poder predecir el futuro con mucha más precisión. En concreto, en las series financieras, la importancia de los modelos para predecir la volatilidad se acentúa, ya que esta es una medida del riesgo en los mercados de activos. Las personas no solo están interesadas en los precios que toman los activos, sino también en la probabilidad de que se produzcan movimientos de precios graves, es por ello que resulta interesante poder modelizar la volatilidad de nuestras series financieras.

Si representamos el correlograma de la serie al cuadrado, veremos cómo existe una gran dependencia, la varianza de la serie depende de las varianzas de los periodos anteriores, ver anexo 8.3. Esta dependencia temporal de la varianza es lo que se conoce como heterocedasticidad condicional. Para detectar esta dependencia en los cuadrados realizaremos el contraste ARCH.

4.1 Contraste ARCH

Dado que los correlogramas de las series al cuadrado muestran una estructura de dependencia, es de esperar que al realizar el contraste sobre si existe estructura heterocedástica la respuesta sea afirmativa.

Para realizar el contraste procedemos de la siguiente manera:

Dado que queremos detectar la dependencia temporal de los cuadrados de los residuos (varianza), estimamos:

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m \hat{u}_{t-m}^2$$

Siendo \hat{u}_t^2 los residuos de cada modelo ARIMA estimado anteriormente para cada una de las series.

La hipótesis nula dice que no hay heterocedasticidad condicional, al contrario que la hipótesis alternativa.

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

$$H_1: \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_m \neq 0$$

El estadístico de contraste es $T \cdot R^2 \sim \chi^2$ con m grados de libertad bajo H_0 .

Los resultados del contraste anterior son los que esperábamos, para todas las series financieras rechazamos la hipótesis nula de no presencia de heterocedasticidad condicional:

	$T \cdot R^2$	P-valor
Apple	278,579	0***
Nike	280,631	0***
Ford Motor	371,142	0***
Goldman Sachs	614,56	0***
Schlumberger	490,493	0***
Cartera equiponderada	807,705	0***

Fuente: Elaboración propia

4.2 Estimación de la heterocedasticidad condicional.

Tras haber comprobado en el apartado anterior la presencia de heterocedasticidad condicional para todas las series, el siguiente paso es conseguir modelizarla. Analizaremos diferentes modelos para la varianza condicionada, a partir de la dependencia temporal que se ha observado en la misma

Dada la importancia creciente de la volatilidad y su estimación, sobretudo en el mundo de las finanzas, podemos encontrar abundante literatura financiera sobre el tema en cuestión.

Han aparecido numerosos modelos para poder predecir la volatilidad.

En 1982 Engle introduce los llamados modelos ARCH, modelos que suponían que la varianza condicionada no era constante, sino que dependía del cuadrado de las innovaciones pasadas (varianza dependiente de una estructura autorregresiva). De su propia definición viene el nombre ARCH (AutoRegressive Conditional Heterocedastic).

Modelo ARCH

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$

A partir de este momento han aparecido modelos generalizando el anterior con el objetivo de ir solventando las limitaciones que el anterior presentaba.

El modelo GARCH (Bollerslev 1986) simplemente es una generalización del anterior, que incorpora también esta dependencia, pero en términos de media móvil. Surge además como consecuencia de que el anterior modelo puede dejar de ser parsimonioso si los retardos significativos son muchos, y por tanto el modelo GARCH evita el sobreajuste del modelo. En general el modelo GARCH(1,1) es suficiente para capturar la volatilidad de la mayoría de series, en pocas ocasiones son necesarios órdenes superiores.

Modelo GARCH

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1|t-2}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q|t-q-1}^2$$

Los modelos GARCH y ARCH recogen adecuadamente la modelización de las series financieras, sin embargo, estos modelos suponen efectos simétricos, es decir, la dependencia se establece en función de las magnitudes de las observaciones pasadas y no depende de su signo. Esta hipótesis no es cierta en concreto en este tipo de series financieras, que normalmente muestran apalancamiento, es decir, los shocks negativos suelen afectar mucho más a la volatilidad que los shocks positivos, por ello ha sido necesario el estudio de otros modelos que no suponen esta restricción para lograr capturar lo que no han podido los modelos anteriores. (Nelson 1991)

Los modelos que vamos a analizar que permiten tener en cuenta esta distinta repercusión de los shocks negativos y positivos son los modelos siguientes:

Modelo GJR (Glosten et al)

$$\sigma_{t|t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1|t-2}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1}$$

$$\text{Donde } I_{t-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

EGARCH (GARCH exponencial)

$$\ln(\sigma_{t|t-1}^2) = \omega + \beta \ln(\sigma_{t-1|t-2}^2) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1|t-2}^2}} + \alpha \left[\frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1|t-2}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

Donde γ es negativo si la relación entre volatilidad y rendimientos es negativa.

Además de lo anterior, en la modelización de series financieras es muy importante conocer la distribución del error de los modelos para mejorar la modelización.

Las distintas distribuciones con las que hemos tratado para escoger aquella que se asemeje a la distribución de los errores son; la distribución normal, ya que son muchos las afirmaciones de que las rentabilidades de las series financieras siguen una distribución normal, la distribución t-student que recoge las propiedades de las distribuciones leptocúrticas, lo que también parece encontrarse en muchas series financieras, y la distribución t asimétrica, dado que se observa en muchas series financieras la presencia de asimetría negativa.

Las distribuciones que, según los contrastes realizados, siguen los errores de nuestras series financieras son la distribución t-student en todas ellas, excepto en la cartera equiponderada, que sigue una distribución t asimétrica.

Los coeficientes con los que reflejaremos las distribuciones del término de error, son λ para la distribución t-student, añadiéndole el término λ para aquellas distribuciones t asimétricas, la significatividad de estos coeficientes determinará la distribución del término error.

Una vez escogidas las distribuciones para cada tipo de serie estimamos los GARCH, GJR y EGARCH para modelizar la variabilidad de las series heterocedásticas.

Estimaciones GARCH (1,1)

Apple	α_0	α_1	β	ni
Coeficiente	1,03712e-06	0,040717	0,95929	4,796
Desv. típica	9,81676e-07	0,01116	0,0123	0,364
P-valor	0,2967	0,0005***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Nike	α_0	α_1	β	ni
Coeficiente	1,481e-06	0,02949	0,96429	4,2152
Desv. típica	5,42e-07	0,00493	0,0059	0,2935
P-valor	0,0063***	2,18e-09***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Ford Motor	α_0	α_1	β	ni
Coeficiente	1,993e-06	0,0468	0,95036	5,2741
Desv. típica	1,66e-06	0,0135	0,01439	0,4389
P-valor	0,0875*	0,0005***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Goldman Sachs	α_0	α_1	β	ni
Coeficiente	3,256e-06	0,0553	0,9349	6,5645
Desv. típica	1,092e-06	0,0108	0,01257	0,7055
P-valor	0,0029***	3,08e-07***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Schlumberger	α_0	α_1	β	ni
Coeficiente	1,449e-06	0,03813	0,9585	8,3226
Desv. típica	6,495e-07	0,0054	0,0059	1,079
P-valor	0,0257**	1,77e-12***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Cartera	α_0	α_1	β	ni	lambda
Coeficiente	1,80e-06	0,0714	0,9196	8,4456	-0,0867
Desv. típica	6,13e-07	0,01138	0,0129	1,0937	0,02067
P-valor	0,0033***	0***	0***	0***	2,72e-05***

Fuente: Elaboración propia

Como vemos en las anteriores estimaciones GARCH(1,1), los coeficientes que acompañan a los retardos de las innovaciones y las varianzas condicionales son significativamente distintos de 0, por tanto, podemos decir que los modelos son heterocedásticos y los podemos modelizar a partir de los modelos GARCH, ya que la varianza no es constante, sino que depende de los retardos de esta misma además de las innovaciones pasadas. Además, podemos destacar en todas las estimaciones anteriores que la constante es prácticamente cero y que el coeficiente más alto es el que acompaña al retardo de la varianza condicional, siendo siempre $\beta > 0,92$ indicando un alto grado de persistencia.

Ahora bien, como hemos comentado antes, podemos realizar otras estimaciones a partir de las variantes del GARCH, que puedan tener en cuenta el signo de los shocks, ya que esperamos que las series financieras presenten apalancamiento y por ello los shocks negativos afecten más a la variabilidad que los shocks positivos.

En las siguientes estimaciones, el término γ es el que nos indica esta asimetría en los shocks, de manera que, si es estadísticamente distinto de cero, concluiremos que las siguientes estimaciones son más adecuadas que el simple GARCH donde no se tenía en cuenta esta posible asimetría.

Estimaciones GJR

Apple	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	2,27e-06	0,0529	0,29077	0,9424	4,8997
Desv.típica	2,39e-06	0,02316	0,058	0,0274	0,3855
P-valor	0,3422	0,0224**	6,50e-05***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Nike	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	2,665e-06	0,03488	0,4086	0,9497	4,348
Desv.típica	1,393e-06	0,0089	0,0947	0,0155	0,3116
P-valor	0,055*	8,68e-05***	1,6e-05***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Ford Motor	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	1,815e-06	0,0454	0,04616	0,952	5,278
Desv.típica	1,16e-06	0,0136	0,055	0,0145	0,4408
P-valor	0,1179	0,0009***	0,4015	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Goldman Sachs	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	4,0025e-06	0,0545	0,2527	0,93069	6,6618
Desv.típica	1,47e-06	0,0129	0,053	0,01647	0,7412
P-valor	0,0064***	2,38e-05***	1,85e-06***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Schlumberger	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	1,837e-06	0,03505	0,29766	0,9586	8,3919
Desv.típica	7,47e-07	0,0053	0,0686	0,006	1,0339
P-valor	0,0101**	8,22e-12***	8,22e-06***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Cartera	ω	α	γ	β	ni	lambda
Coeficiente	2,18e-06	0,0555	0,3711	0,9237	9,124	-0,0895
Desv.típica	6,94e-07	0,01151	0,0723	0,0147	1,3	0,0208
P-valor	0,0041***	2,7e-06***	9,3e-08***	0***	0***	2,1e-05***

Fuente: Elaboración propia

Si nos fijamos en los coeficientes del término gamma (γ) vemos que en todas nuestras estimaciones es significativo excepto en Ford Motor, lo que nos indica que para todas las que es significativo, sí existe asimetría en los shocks y por tanto es mejor estimación de la volatilidad este último que el GARCH anterior, pues no tenía en cuenta esta asimetría.

Estimaciones EGARCH

Apple	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	-0,1892	0,1403	-0,0507	0,989	4,96
Desv.típica	0,0667	0,0323	0,0166	0,0059	0,3973
P-valor	0,0052***	1,39e-05***	0,0023***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Nike	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	-0,1659	0,1065	-0,0423	0,9896	4,403
Desv.típica	0,038	0,0152	0,01026	0,0036	0,3186
P-valor	1,27e-05***	2,58e-012***	3,19e-05***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Ford Motor	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	-0,113	0,109	-0,0283	0,996	5,183
Desv.típica	0,0382	0,0272	0,0086	0,0026	0,4284
P-valor	0,0031***	6,30e-05***	0,001***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Goldman Sachs	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	-0,1651	0,1213	-0,038	0,9911	6,4253
Desv.típica	0,0398	0,022	0,0093	0,00331	0,6825
P-valor	3,4e-05***	3,99e-08***	4,17e-05***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

Schlumberger	ω	α	γ	β	ni
Coeficiente	-0,12466	0,09388	-0,03505	0,9934	8,3645
Desv.típica	0,0213	0,01139	0,00768	0,0021	1,1253
P-valor	4,85e-09***	0***	4,99e-06***	0***	0***

Fuente: Elaboración propia

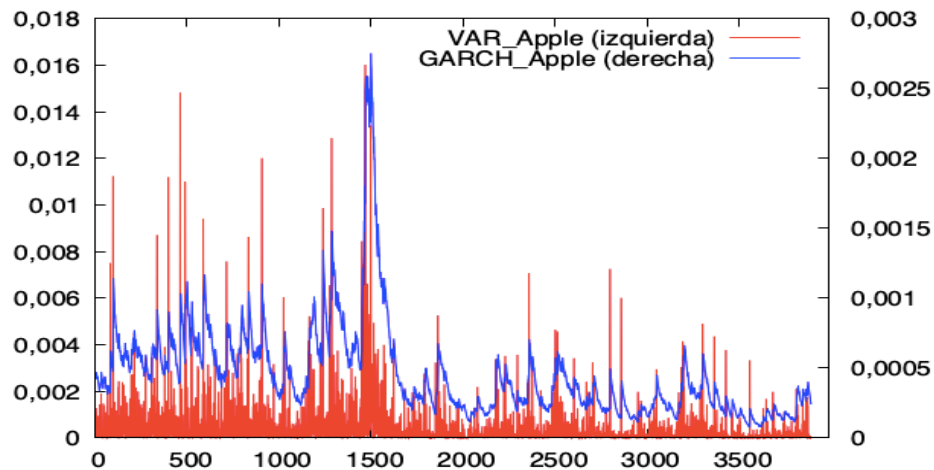
Cartera	ω	α	γ	β	ni	lambda
Coeficiente	-0,2013	0,1319	-0,071	0,9886	8,543	-0,094
Desv.típica	0,0462	0,0212	0,0114	0,0038	1,123	0,022
P-valor	1,3e-05***	0***	0***	0***	0***	2,2e-05***

Fuente: Elaboración propia

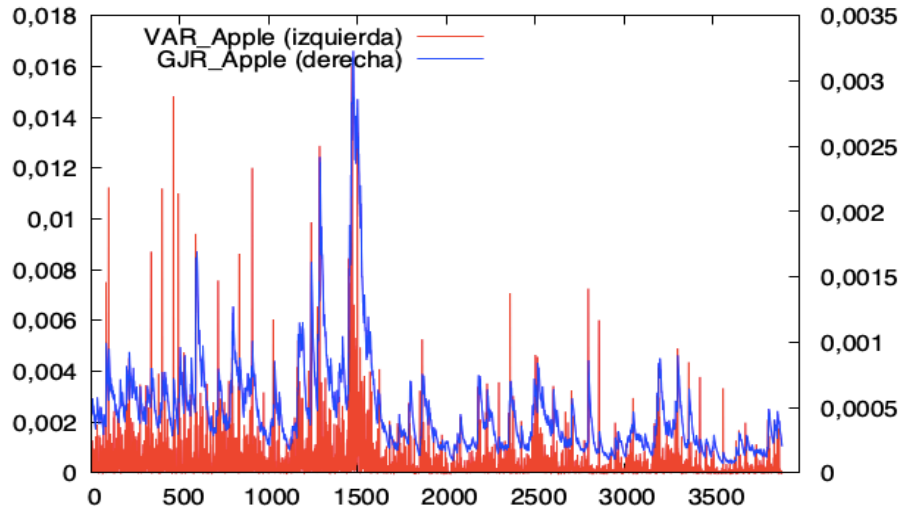
Si estimamos la varianza a través del EGARCH, los resultados del término γ son los mismos que en caso anterior excepto en la serie Ford Motor, donde antes no era significativo y ahora sí, por tanto, en todas nuestras series es más correcto utilizar el EGARCH antes que el GARCH ya que los shocks afectan de forma distinta en caso de tratarse de un shock positivo o negativo, y por tanto es importante estimar un modelo que recoja este efecto como es el EGARCH.

Para comparar estos tres modelos vamos a ver los gráficos donde comparamos la varianza real que presenta la serie (errores al cuadrado de los modelos ARMA estimados anteriormente) y la varianza estimada por cada uno de los modelos anteriores, de esta forma podremos ver si efectivamente estos modelos estiman bien la varianza.

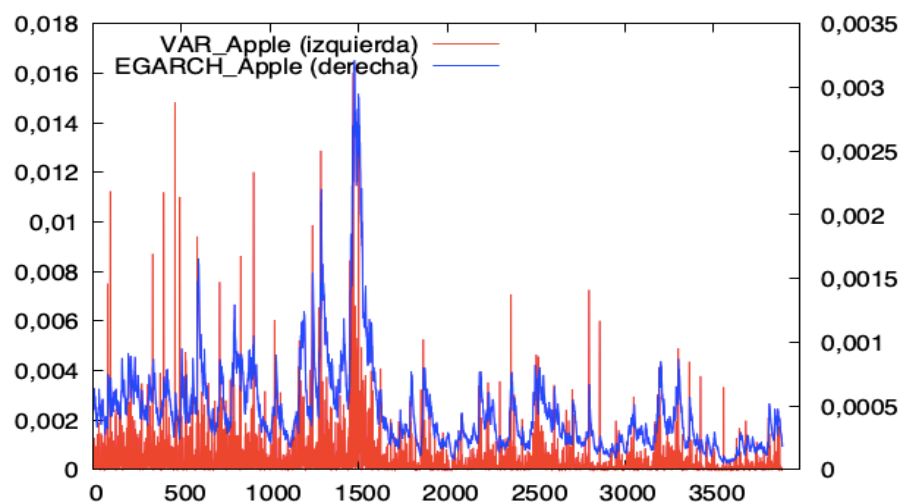
Apple



Fuente: Elaboración propia

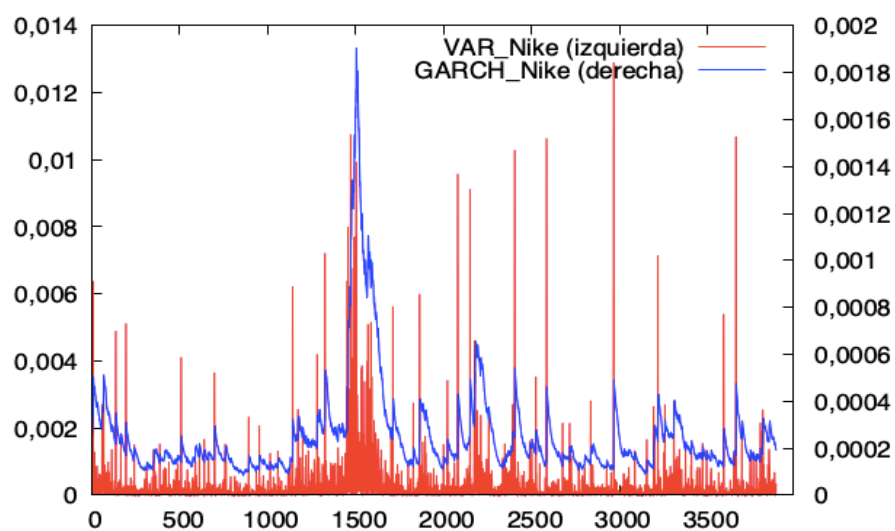


Fuente: Elaboración propia

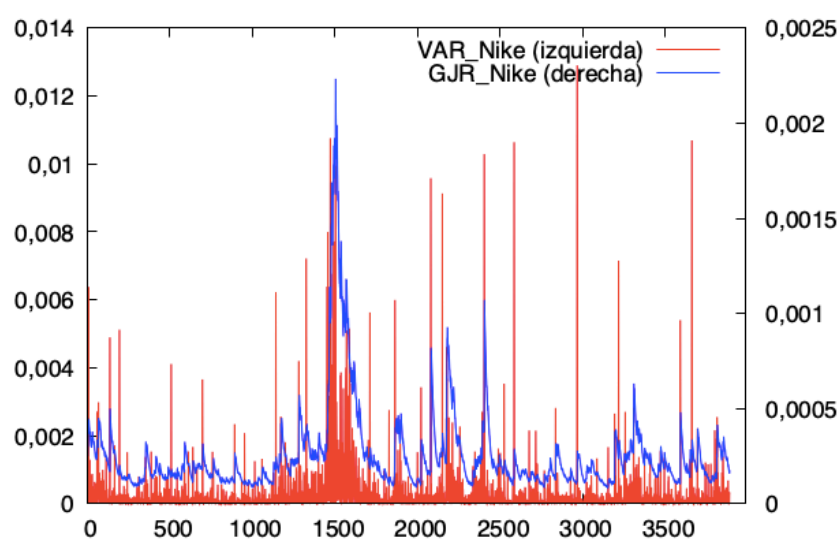


Fuente: Elaboración propia

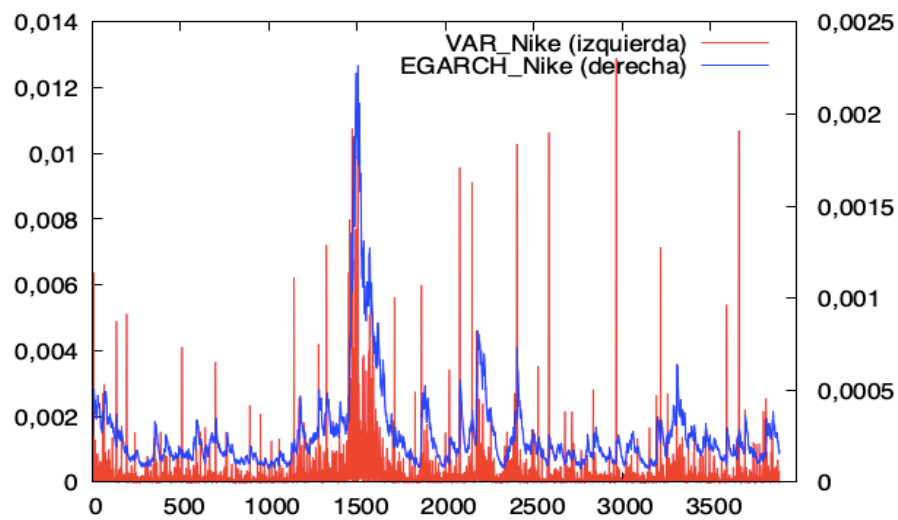
Nike



Fuente: Elaboración propia

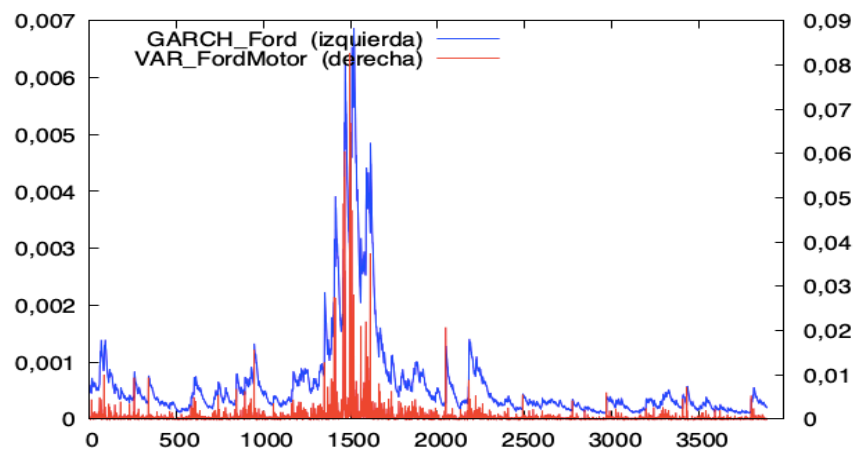


Fuente: Elaboración propia

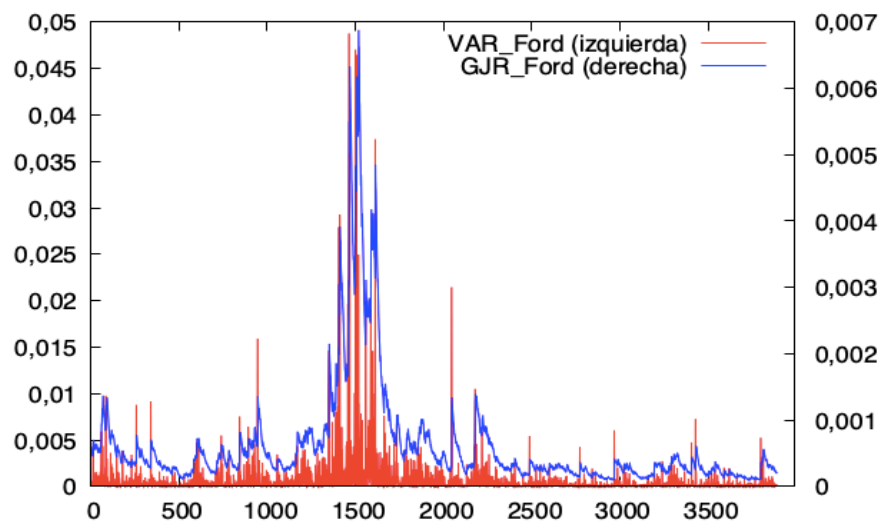


Fuente: Elaboración propia

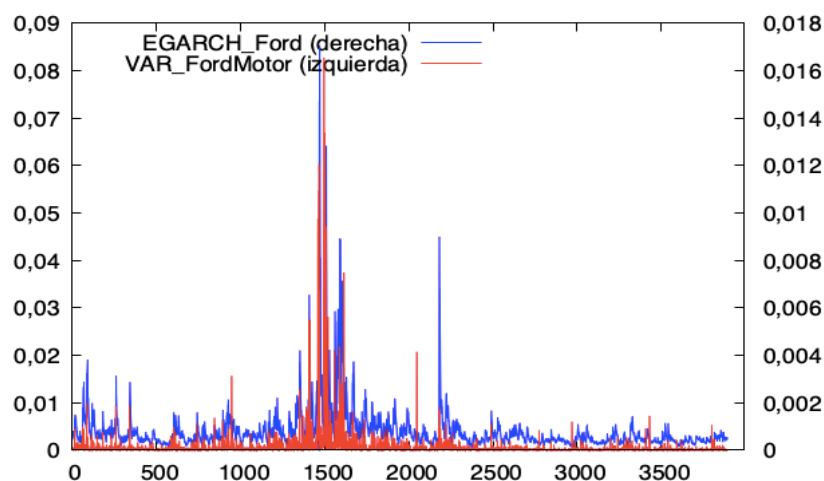
Ford



Fuente: Elaboración propia

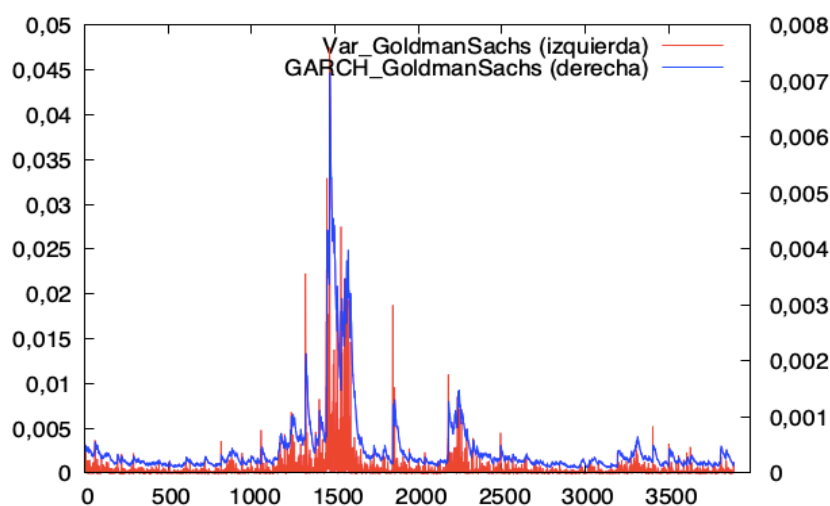


Fuente: Elaboración propia

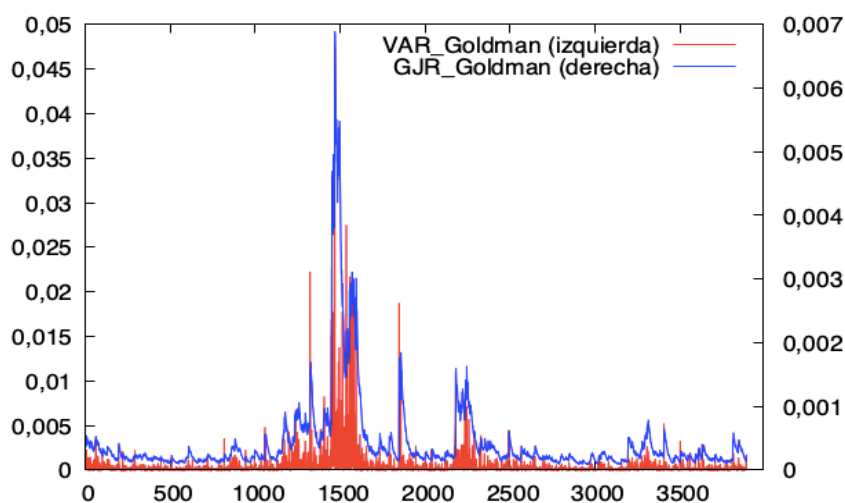


Fuente: Elaboración propia

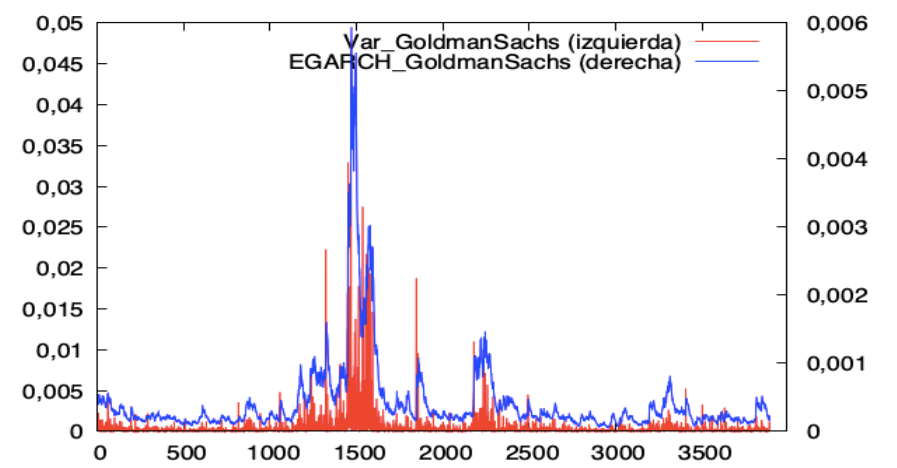
Goldman Sachs



Fuente: Elaboración propia

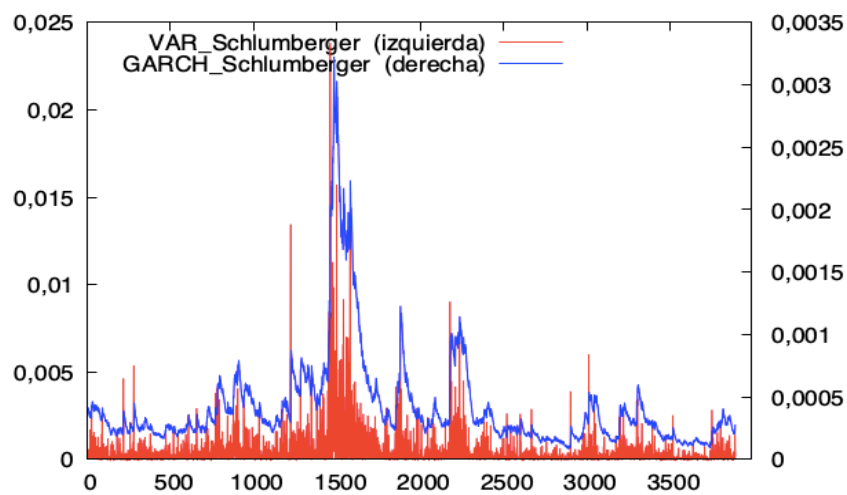


Fuente: Elaboración propia

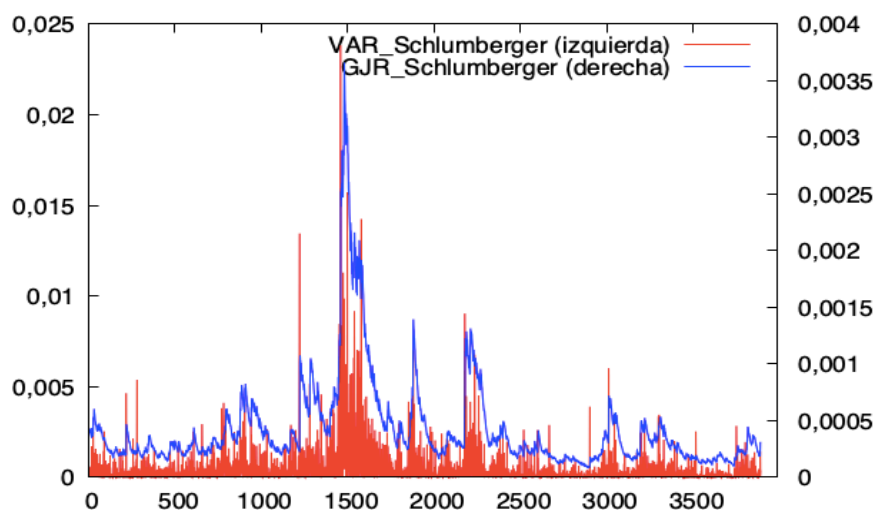


Fuente: Elaboración propia

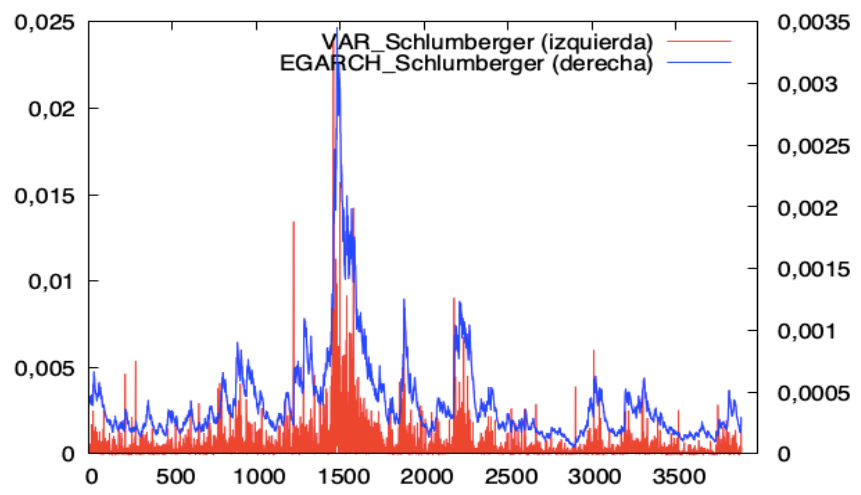
Schlumberger



Fuente: Elaboración propia

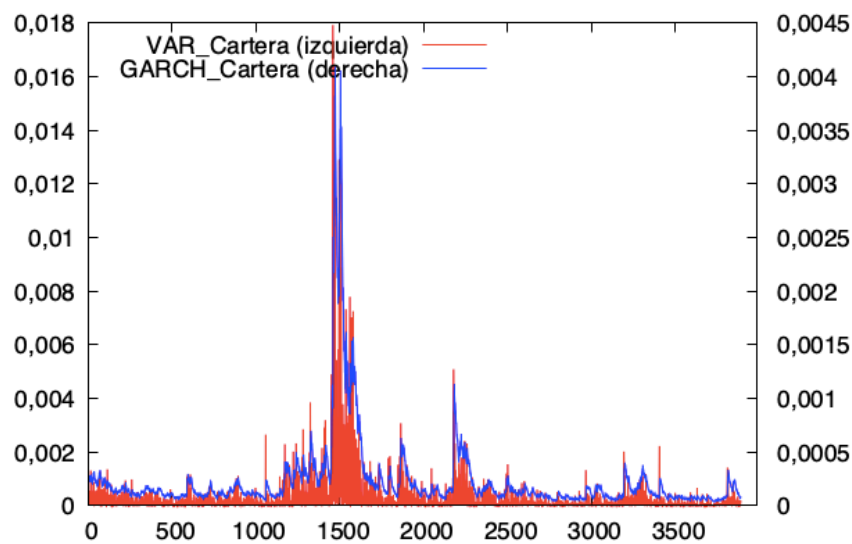


Fuente: Elaboración propia

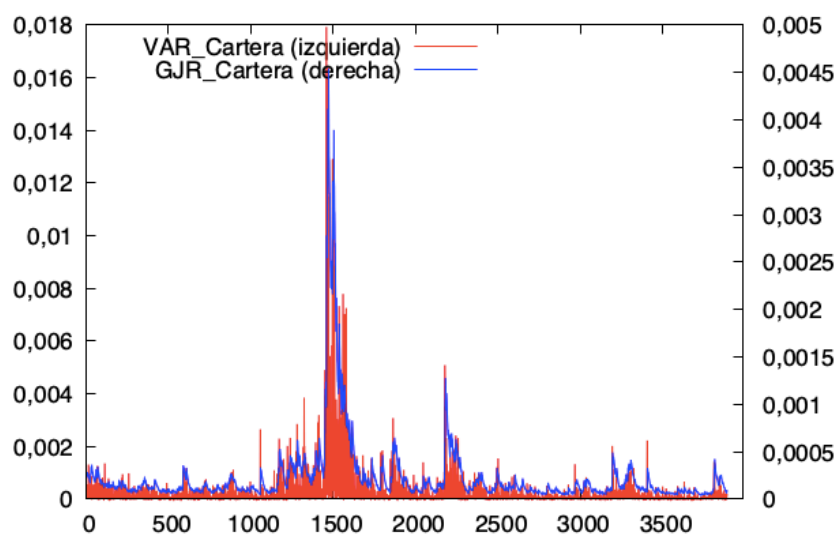


Fuente: Elaboración propia

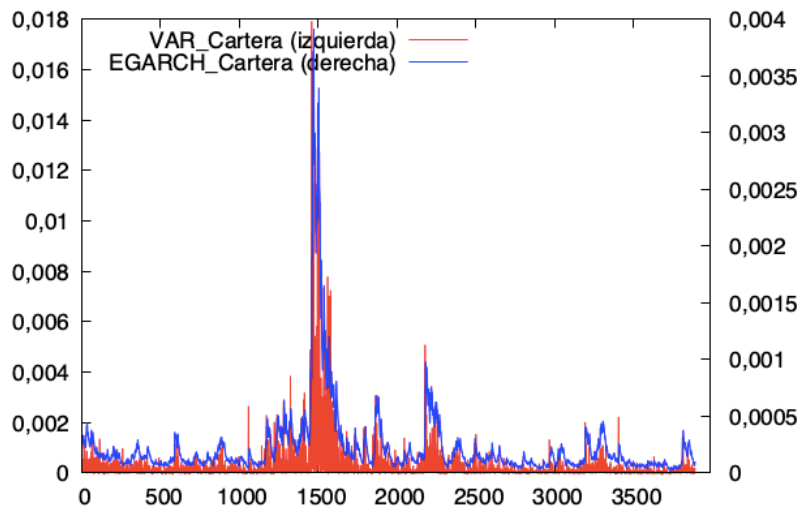
Cartera



Fuente: Elaboración propia



Fuente: Elaboración propia



Fuente: Elaboración propia

En los gráficos anteriores podemos observar las diferentes estimaciones de la varianza, que parece que siguen bastante bien la varianza real y por tanto podemos decir que estos modelos estiman bien la varianza de nuestras series, especialmente el modelo EGARCH, por tener en cuenta los shocks asimétricos y acercarse entonces más a la realidad de nuestras series financieras.

Las estimaciones de la varianza son muy útiles desde el punto de vista de la predicción, pues ahora podemos predecir la varianza y desviación típica de los próximos periodos, si sabemos que la varianza sigue un modelo GARCH, entonces la varianza del periodo siguiente al momento t se calculará de la siguiente forma:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_t^2$$

5. Construcción de una cartera de mínima varianza global

Dada la importancia que algunos inversores otorgan al riesgo al que se enfrentan al tomar decisiones de inversión, parece útil la construcción de una cartera de inversión que minimice este riesgo, esta estrategia es lo que se conoce como la cartera de mínima varianza global.

Las carteras de mínima varianza global son carteras formadas por una combinación de activos con el mínimo riesgo posible para un determinado nivel de rentabilidad, no habiendo entonces una cartera posible con menor riesgo, dado ese nivel de rentabilidad.

Si queremos construir una cartera de mínima varianza compuesta por nuestras cinco series financieras, tendríamos que calcular los pesos de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \\ \tilde{w}_4 \\ \tilde{w}_5 \end{pmatrix} = \frac{\Omega^{-1} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) * \Omega^{-1} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Donde la matriz de varianzas y covarianzas viene representada por Ω y por tanto Ω^{-1} es su inversa. Es una matriz de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \sigma_{1,4} & \sigma_{1,5} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \sigma_{2,4} & \sigma_{2,5} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \sigma_{3,4} & \sigma_{3,5} \\ \sigma_{4,1} & \sigma_{4,2} & \sigma_{4,3} & \sigma_4^2 & \sigma_{4,5} \\ \sigma_{5,1} & \sigma_{5,2} & \sigma_{5,3} & \sigma_{5,4} & \sigma_5^2 \end{pmatrix}$$

Los subíndices 1,2,3,4 y 5 corresponden a las acciones Apple, Nike, Ford, Schlumberger y Goldman Sachs respectivamente.

Si supusiéramos varianzas y covarianzas constantes, bastaría con calcular estas mediante las fórmulas habituales utilizando para ello toda nuestra muestra. Obtendríamos con ello una única combinación de pesos para este conjunto de acciones (a partir de la resolución del cálculo explicado anteriormente), que sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_{Apple} \\ \tilde{w}_{Nike} \\ \tilde{w}_{Ford} \\ \tilde{w}_{Schlumb} \\ \tilde{w}_{Goldman} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2012 \\ 0,5026 \\ 0,0502 \\ 0,0762 \\ 0,1698 \end{pmatrix}$$

No obstante, dado que en el apartado anterior hemos verificado que la varianza condicionada de nuestras series no es constante, sino que se puede modelizar mediante los modelos GARCH, EGARCH y GJR, parece lógico pensar que la cartera de mínima varianza global, que como hemos explicado trata de encontrar aquella oportunidad de inversión que consiga la menor varianza posible, cambiará en función del tiempo.

Puesto que contamos con datos diarios, si utilizamos la estimación GARCH calculada en cada serie para la construcción de esta cartera, tendremos carteras distintas cada día, reflejando esto la dinámica de la volatilidad.

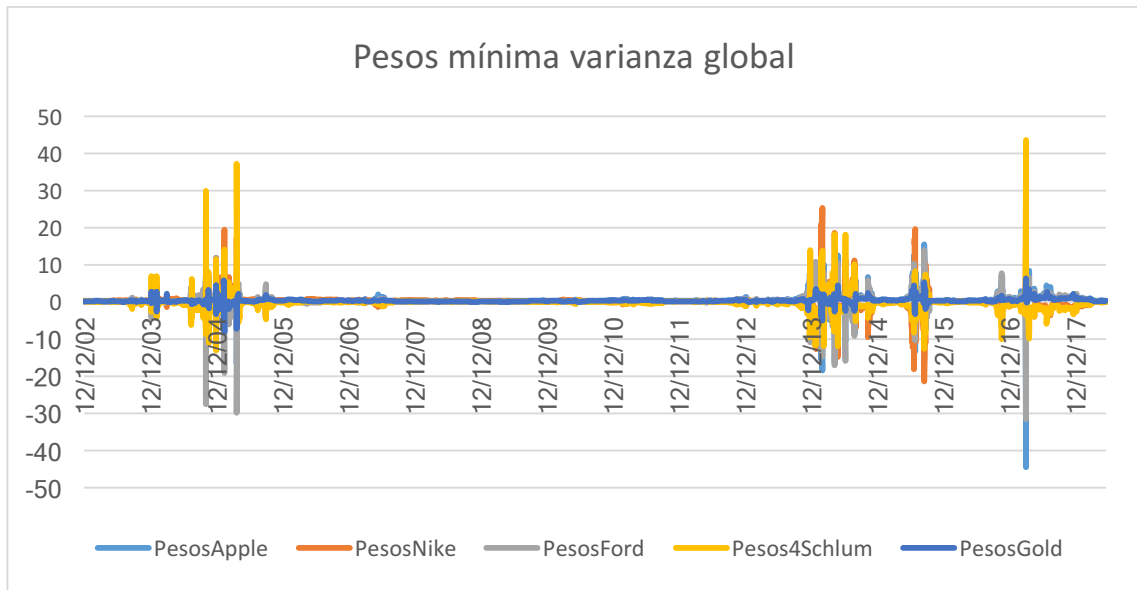
A pesar de que el modelo adecuado para estimar la volatilidad para todas nuestras series parecía ser el modelo EGARCH, hemos realizado este apartado mediante las estimaciones GARCH para cada una de nuestras series puesto que a la hora de predecir la cartera de periodos siguientes es mucho más sencillo el cálculo suponiendo que sigue una estructura GARCH.

Construiremos, por tanto, una cartera de mínima varianza global (compuesta por nuestras cinco series financieras) adecuada para cada día teniendo en cuenta que la varianza condicionada varía de acuerdo a una estructura GARCH (1,1). No obstante, ya que la matriz necesaria para calcular la cartera de mínima varianza global incluye no solo las varianzas, sino también las covarianzas entre las distintas acciones, estas últimas se han mantenido constantes. Ahora la matriz de varianzas y covarianzas es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \sigma_{1,4} & \sigma_{1,5} \\ \sigma_{2,1} & \hat{\sigma}_2^2 & \sigma_{2,3} & \sigma_{2,4} & \sigma_{2,5} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \hat{\sigma}_3^2 & \sigma_{3,4} & \sigma_{3,5} \\ \sigma_{4,1} & \sigma_{4,2} & \sigma_{4,3} & \hat{\sigma}_4^2 & \sigma_{4,5} \\ \sigma_{5,1} & \sigma_{5,2} & \sigma_{5,3} & \sigma_{5,4} & \hat{\sigma}_5^2 \end{pmatrix}$$

Donde ahora las varianzas las sustituimos por las estimaciones GARCH ($\hat{\sigma}_i^2$), distintas para cada día.

Podemos representar gráficamente el conjunto de todas las carteras de mínima varianza global, calculadas en base a lo anterior para cada una de nuestras fechas disponibles (30/12/2002 – 30/05/2018).



Podemos ver como se refleja la volatilidad cambiante de estas acciones, mediante cambios bruscos de los pesos destinados a cada activo, pues los distintos pesos cambian como consecuencia de conseguir el menor riesgo en cada momento del tiempo.

No obstante, cabe destacar que el anterior gráfico nos sirve para ver que efectivamente los pesos deberían cambiar en función del tiempo si lo que tratamos es de realizar la cartera de mínima varianza global, siendo conscientes que determinadas combinaciones de pesos derivados del cálculo de la cartera de la forma anteriormente propuesta, no se llevarían a cabo, pues reflejan pesos muy altos o muy negativos que supondrían un endeudamiento excesivo.

Puesto que ya sabemos cómo se comporta la volatilidad de cada una de nuestras series (hemos estimado anteriormente los modelos GARCH) podemos realizar predicciones sobre la varianza de periodos siguientes para cada una de estas acciones y construir por tanto una predicción de la cartera de mínima varianza global de periodos siguientes.

Prediciendo de la siguiente forma:

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta \sigma_{t|t-1}^2$$

Obtenemos, para el periodo siguiente a nuestro conjunto de datos (31/05/2018), los siguientes resultados:

	ε_t	$\hat{\sigma}_{t t-1}^2$	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_1$	Estimación GARCH ($\hat{\sigma}_{t+1 t}^2$)
Apple	-0,00394	0,0002395	1,16E-06	0,0397312	0,959903	0,000231676
Nike	0,0174	0,0001957	1,47E-06	0,028579	0,965196	0,00019901
Ford	0,01003	0,000198	2,36E-06	0,0500772	0,946586	0,000194819
Goldman	0,008039	0,0001956	3,26E-06	0,0553	0,9349	0,000189696
Schlumberger	0,0196	0,0002708	1,45E-06	0,03813	0,9585	0,000275659

Si como antes, mantenemos covarianzas constantes y sustituimos, en la matriz de varianzas y covarianzas, las varianzas estimadas para el periodo siguiente a nuestros datos, los pesos adecuados para el periodo siguiente serían:

$$\begin{pmatrix} \tilde{w}_{Apple} \\ \tilde{w}_{Nike} \\ \tilde{w}_{Ford} \\ \tilde{w}_{Schlumb} \\ \tilde{w}_{Goldman} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42129 \\ 0,61982 \\ -0,19911 \\ -0,08117 \\ 0,239168 \end{pmatrix}$$

Observamos cómo es diferente a la que obteníamos anteriormente, al suponer varianzas constantes, donde la cartera que minimiza la varianza, era la misma para cada periodo del tiempo, lo que no es correcto si la varianza no se mantiene de manera constante, pues habrá periodos donde ciertas acciones sean más volátiles y no convenga invertir en estas (si nuestro objetivo es construir una cartera de este tipo) y otros periodos donde convengan acciones diferentes.

No obstante, no es una cartera adecuada para todo tipo de inversores, puesto que aquellos que estén dispuestos a asumir un mayor riesgo se decantarán por otro tipo de inversión siendo recompensados con una mayor rentabilidad.

6. Conclusiones

La importancia del estudio de la volatilidad se intensifica en los mercados financieros, pues las ganancias de los inversores dependen en buena medida del riesgo, medido este a partir de la volatilidad. Hemos estudiado como, estimar la volatilidad de una serie financiera mediante el cálculo muestral de la varianza, es incorrecto, pues supondríamos que esta se mantiene constante a lo largo del tiempo, lo que hemos comprobado erróneo.

Así, para entender cómo funciona una serie temporal y poder realizar predicciones de forma precisa, es necesario modelizar tanto media, mediante los modelos lineales ARMA, como varianza, pues el nivel de riesgo de una acción también determina las decisiones óptimas de inversión. Hemos conocido entonces los comportamientos de la volatilidad mediante la estimación de modelos que la consigan captar como son los modelos GARCH y sus variantes. En todas ellas hemos conseguido captar mejor el comportamiento de esta mediante los modelos EGARCH, que tiene en cuenta los efectos asimétricos en la volatilidad, estimación que hemos utilizado para visualizar la dinámica cambiante de esta y construir carteras de mínima varianza global para cada momento del tiempo, prediciendo posteriormente la volatilidad de periodos siguientes que nos permite construir la cartera de mínima varianza global para el conjunto de las cinco acciones en el periodo siguiente, comparando esta con la obtenida en caso de haber supuesto varianza constante y concluyendo que dado que los pesos propuestos para esta cartera son los mismos para cada momento del tiempo, lo que no es correcto debido a la volatilidad cambiante que presentan este tipo de series y que ha quedado demostrada, debemos calcular carteras de mínima varianza global para cada momento del tiempo.

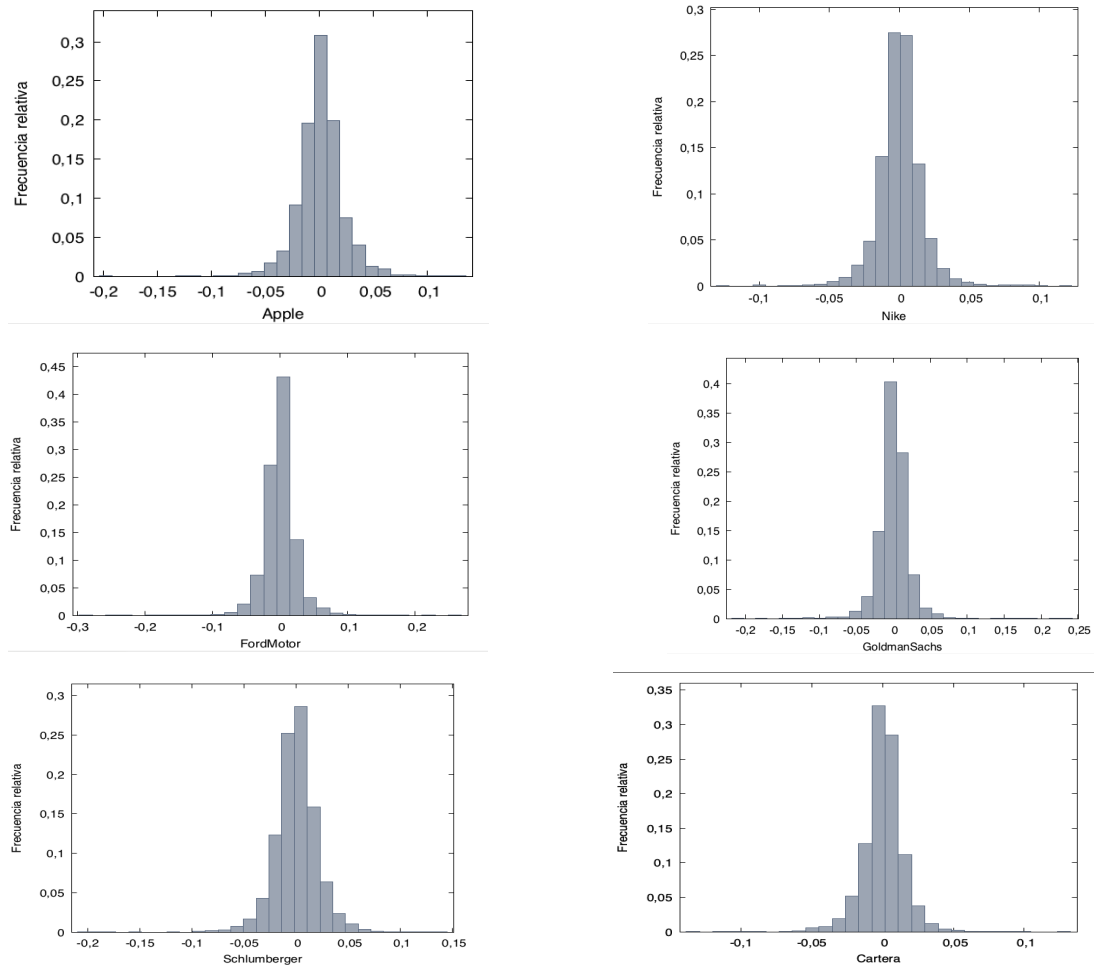
Verificamos por tanto la importancia de conocer la volatilidad y estimarla mediante modelos como los anteriores que reflejen su dinámica cambiante y nos permitan tomar decisiones de inversión de forma mucho más precisa en base a rentabilidad y riesgo.

7. Bibliografía

- Peña, Daniel (2010), *Análisis de series temporales*. Alianza
- Gonzáles Rivera, Gloria (2016), *Forecasting for economics and business*
- Kim, T. and White, H. (2003). *On More Robust Estimation of Skewness and Kurtosis*. Financial Research Letters.
- Jeff Fleming, Chris Kirby, Barbara Ostdiek, *The Economic value of volatility timing using “realized volatility”*
- Marin José M.; Rubio, Gonzalo (2011) *Economía Financiera*.

8. Anexos

8.1 Histogramas de las series



8.2 Contraste Dickey-Fuller

Realizamos el contraste para verificar la estacionariedad de las series, contraste cuya hipótesis nula es la no estacionariedad y la hipótesis alternativa la estacionariedad, concluyendo, por tanto, que todas nuestras series son estacionarias.

Para realizar este contraste estimamos el modelo:

$$\Delta Y_t = \phi^* Y_{t-1} + \sum_{k=1}^p \alpha_k \Delta Y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Siendo p el último retardo significativo. La hipótesis nula es $\phi^* = 0$

Obteniendo los siguientes resultados que indican la estacionariedad de nuestras series, pues en todas ellas rechazamos la hipótesis nula de la existencia de raíces unitarias.

	Estadístico de ϕ^*	P-valor
Apple	-0,9787	0***
Nike	-1,2357	0***
Ford	-0,7765	0***
Goldman Sachs	-1,0815	0***
Schlumberger	-1,0787	0***
Cartera	-0,8187	0***

8.3 Correlogramas de las series al cuadrado

